LA AXIOMÁTICA

Robert Blanche

(1955)

Edición electrónica de www.philosophia.cl / Escuela de Filosofía Universidad ARCIS.

¡Oh matemáticas rigurosas! no las he olvidado desde que sus sabias lecciones, dulces o más que la miel, se filtraron en mi corazón como onda refrescante… En mi espíritu había algo vago, un no sé qué de espeso, como el humo; pero, religiosamente, pude franquear las gradas que llevan a tu altar, y me has despojado de ese velo oscuro, al modo que el viento con la niebla. Y han colocado en su lugar una frialdad excesiva, una mesura acabada y una lógica implacable.

LAUTRÉAMONT, *Los cantos de Maldoror*

Índice

I. LAS FALLAS DEL APARATO EUCLIDIANO

1. Introducción general

La geometría clásica, de acuerdo con la forma que Euclides le dio en sus *Elementos,* pasó durante mucho tiempo como un modelo imposible de superar, y, al mismo tiempo, de igualar, de la teoría deductiva. Los términos que son propios a la teoría jamás son presentados sin una definición previa, las proposiciones no se citan sin antes haber sido demostradas, con excepción de un número reducido que sí son enunciadas, en primer lugar, en calidad de principios. En efecto, una demostración no puede remontarse al infinito y debe basarse en algunas proposiciones primeras, pero éstas han sido escogidas de modo tal que no subsista duda alguna en espíritu de su sano juicio. No importa que todo lo que se afirme sea empíricamente cierto, pues no se apela a la experiencia para justificarlo. El geómetra trabaja recurriendo sólo a la demostración y únicamente fundamenta sus pruebas sobre lo que ya con anterioridad se encuentre establecido en tanto esté de acuerdo con las leyes de la lógica. De este modo cada teorema guarda una relación necesaria con las proposiciones de las cuales es deducido como una consecuencia, de modo que, prueba tras prueba va constituyéndose una red estrecha en la que, directa o indirectamente, todas las proposiciones se encuentran relacionadas entre sí. Así, el conjunto integra un sistema del que no se puede sustraer o cambiar una parte sin comprometer el todo. De este modo, "los griegos razonaron con toda la certeza posible en el campo de las matemáticas y heredaron al género humano los modelos del arte de la demostración".[1] Mediante ellos la geometría dejó de ser una colección de fórmulas prácticas, o, mejor dicho, de enunciados empíricos, y se transformó en ciencia racional. Viene de allí ese papel privilegiado que no se le ha dejado de reconocer. Si se obliga a los niños a estudiarla no es con el fin de enseñarles verdades sino con el de disciplinar su espíritu, pues se considera que su práctica ofrece y desarrolla la costumbre de razonar rigurosamente. Como escribió L. Brunsvichg:[2] "Euclides, para las innumerables generaciones que se han nutrido de su sustancia, quizá ha sido menos un profesor de geometría que uno de lógica." Y la expresión *more geometrico* ha llegado a significar *more logico.*

[1] Leibniz, *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano* (1704), IV, II, p. 13.

[2] *Les étapes de la philosophie mathématique,* cap. VI, p. 49.

Por tanto, ha venido pareciendo cada vez más que, si bien la geometría euclidiana había venido siendo por mucho tiempo el ejemplo más acabado que se pudiera dar de una teoría deductiva ideal, el aparato lógico sobre el cual descansaba no era del todo irreprochable. Varias de sus fallas fueron apuntadas desde muy temprano, pero no fue sino hasta el siglo XIX que se midió la distancia existente entre una exposición tradicional y una teoría deductiva ideal. Una de las características que mejor distinguen a las matemáticas a partir de esta época es, de hecho, el acrecentamiento que se dio súbitamente por preocuparse del rigor lógico. Estudiada de este modo con un rigor nuevo, la deducción geométrica clásica aparecía como defectuosa en numerosos puntos. Se hicieron esfuerzos por corregirla y la presentación axiomática de la teoría es resultado de tales esfuerzos. Originada principalmente como una reflexión sobre la deducción geométrica va desprendiéndose, por lo demás, precisamente en razón de su carácter lógico y formal, de su contenido geométrico y, de este modo puede practicarse sobre una teoría deductiva cualquiera. Puede decirse que un sistema axiomático o bien, una teoría axiomática es, en este contexto, la forma definitiva que en la actualidad toma una teoría deductiva. En modo alguno puede decirse que es el sistema quimérico con el que Pascal soñaba y que estaba destinado a espíritus colocados más allá de lo humano, y en el que todos los términos quedarían definidos y todas las proposiciones demostradas. Sino más bien uno donde todos los términos queden explicitados, así como las proposiciones que no estén demostradas. Estas últimas quedan consideradas como meras hipótesis con las cuales puede construirse las proposiciones del sistema de acuerdo con reglas lógicas determinadas en forma perfecta y expresa.

Un método parece afirmativo si las razones que lo impusieron son desconocidas. Y lo mejor para hacer comprensible la función que desempeña la axiomática es, pues, en primer lugar, exponer inicialmente las fallas que se intenta remediar (capítulo I). Mas razonablemente se duda que la axiomática haya alcanzado desde un primer momento su perfección. En rigor, las exigencias que la hicieron nacer fueron, en su turno, como exasperadas por su uso y se volcaron sobre ella para empujarla cada vez más lejos en la ruta con la cual se había comprometido. Sin seguir detalladamente esta transformación histórica en forma detallada, se hace necesario distinguir al menos dos etapas mayores de su desarrollo: la primera puede situarse a finales del siglo XIX (capítulo II) y la segunda se inicia en los años veinte del siglo XX (capítulo III). Se intentará demostrar los alcances de este método por su uso propiamente científico (capítulo IV) así como por sus implicaciones filosóficas (capítulo V).

2. Los postulados

Lo que inicialmente mortificó a los lectores de Euclides, amigos del rigor, fue que intervinieran los postulados. No se trataba, en primer lugar, de los tres postulados que encabezan los *Elementos,* junto a las definiciones y los axiomas, y cuyo carácter operativo es muy general y que, además, tienen el único objetivo de señalar que se permitirán construcciones recurriendo a la regla y el compás. Pero una vez que Euclides inicia su cadena deductiva, al hacer una demostración, y por necesidad de ésta, recurre a una proposición muy especial que solicita le sea concedida sin otra razón que considerarla una especie de llamado a la evidencia intuitiva. De este modo, para justificar su proposición 29 se hace necesario aceptar que, por un punto fuera de una recta no puede pasar sino una sola línea paralela. La simetría que aparentemente existe entre la proposición mediante la cual se enuncia que por un punto pasa, al menos, una paralela a la recta, proposición establecida por medio de una demostración (el teorema de la existencia), la cual enuncia que, por lo menos, pasa una (postulado de la unicidad), convertía en aún más inaudita la asimetría de las justificaciones. El postulado referente a las paralelas se convertía de este modo en un eslabón ajeno al sistema; como un recurso cuyo fin era llenar una laguna del encadenamiento lógico. A ojos de los geómetras tomaba la forma de un teorema empírico de cuya certeza no se dudaba, pero del cual aún no se contaba con una demostración. Los estudiosos alejandrinos, árabes y modernos intentaron, a lo largo del tiempo, tratar de encontrar la demostración, pero su análisis llevaba invariablemente a la conclusión de que las demostraciones sucesivas tenían como base otra suposición con frecuencia implícita. Sólo se cambiaba de postulado. Es conocida la forma como la frustración nacida del intento de lograr una demostración directa dio lugar a que se intentara una demostración mediante el absurdo, que pronto tuvo fin, recurriendo a la inversión del punto de vista en las primeras geometrías no euclidianas.

El alcance epistemológico de las nuevas teorías ha sido considerable. En forma particular, contribuyeron en gran parte a cambiar el centro de interés de la geometría especulativa, llevándolo del contenido a la estructura, de la verdad intrínseca de las proposiciones aisladas a la coherencia interna de un sistema total. La suma de los ángulos de un triángulo ¿es igual, menor o superior a la de dos ángulos rectos? Un geómetra de la antigüedad hubiera afirmado que lo correcto era lo primero y que los otros dos casos eran falsos. Un geómetra moderno considera que se trata de tres teoremas distintos que no se excluyen entre sí, sino únicamente dentro de un mismo sistema, ya sea que el número de paralelas sea considerado igual, superior o inferior[3] a uno, y que incluso pueden ser tolerados dentro de un sistema debilitado o más general, en el cual el número de paralelas posibles se mantenga

[3] El teorema, que es mencionado en la página anterior, y que establece la existencia de la paralela, postula que una recta se puede prolongar indefinidamente, lo cual bien puede rechazarse.

en suspenso. Que en nuestra escala la experiencia verifique una y sólo una de las tres proposiciones concierne sólo al uso práctico de la ciencia, pero no a la ciencia pura y desinteresada.

La idea así aparecida con motivo de la teoría de las paralelas, necesaria y naturalmente necesita extenderse a todo el conjunto de los postulados. Vemos de este modo cómo se disocian los dos aspectos de la verdad geométrica hasta entonces mezclados desusadamente. Un teorema geométrico era considerado a la vez como un informe acerca de las cosas y una elaboración del espíritu, una ley de la física y parte de un sistema lógico; una verdad acabada y una verdad de la razón. De estas parejas paradójicas la geometría teórica hace a un lado, decididamente, el primer elemento que asigna a la geometría aplicada. Para los teoremas no existe ya una verdad aparte y, por decirlo así, una verdad atómica. Su verdad reside únicamente en su integración al sistema. Es por eso que algunos de los teoremas que se consideran incompatibles entre sí pueden ser verdaderos siempre que queden referidos a sistemas distintos.

Y, en lo que respecta a los sistemas, no se trata ya de que éstos sean verdaderos o falsos, sino exclusivamente en el sentido lógico: coherencia o contradicción interna. Los principios que los rigen no constituyen sino meras hipótesis en la acepción matemática de este término. Sólo han sido sentados mas no demostrados, no son dudosos, como es el caso de las conjeturas de un físico, sino que se encuentran más allá de lo verdadero y de lo falso, como una decisión o una convención. La verdad matemática toma de este modo un carácter global, el de un contenido vasto en el que la unificación de todos los principios constituye el antecedente y, el de todos los teoremas, el consecuente.

Dentro de la interpretación común y corriente, una demostración matemática era categórica y apodíctica. Afirmaba: estos principios son verdaderos absolutamente y la proposición que de ellos deduzco es, en consecuencia, también verdadera. Aristóteles la denominó "el silogismo de lo necesario". En la actualidad afirma que sólo si se da arbitrariamente por sentado tal conjunto de principios, éstas son las consecuencias que, formalmente, resultan. La necesidad no radica más que en el lazo lógico que une las proposiciones y se ha retirado de ellas. Las matemáticas se han convertido, en palabras de Pieri, en un sistema hipotético-deductivo.

3. Las figuras

Según Euclides, el postulado de las paralelas invocaba, claramente, a la intuición espacial, si bien aparentemente excepcional. De hecho se le invoca a lo largo de todas las demostraciones, por lo que Poincaré podía decir con toda justicia que en esa construcción enorme, en la que los antiguos no encontraban falla alguna de carácter lógico, todas sus partes se deben a la intuición. Y, en cierto sentido, nada era más manifiesto, como lo atestiguan las mismas figuras. Pero en el texto no queda esto expresado tan claramente, sino que hace creer que las figuras no se encuentran allí como meros auxiliares del razonamiento, y que, de cierto modo, duplican la demostración lógica recurriendo a una ilustración apreciable sin que le sean indispensables. No hay nada de eso. Elimínese la figura, trazada o imaginada, y la demostración cae por tierra. No vayamos más allá de la primera demostración de Euclides que constituye un problema: construir un triángulo equilátero sobre el segmento de la recta AB. Trace dos círculos cuyo radio es AB. El centro de uno de ellos es A y el del otro B. El punto de intersección M, cuya distancia de AB es el radio AB, constituirá el tercer vértice que se busca. Pero para quien no ve o no se representa mentalmente tal figura la demostración no es completa: ¿cómo puede uno saber si los dos círculos se cortan? La existencia del punto M ha sido mostrada, no demostrada.

Mucho se ha discutido acerca de si tomar en cuenta las figuras resultaba esencial a la especulación geométrica. Si se toman como modelo las demostraciones geométricas clásicas resulta entonces cierto que la intuición —la contemplación y la propia construcción— debe intervenir. Esta era, como es sabido, una de las tesis sobre la que Kant construyó la base de su *Crítica,* en la que decía, “dése a un filósofo la idea del triángulo, considerará las ideas más elementales acerca de la línea recta, del ángulo, del número 3, y jamás descubrirá con lo anterior que la suma de sus ángulos sea igual a dos ángulos rectos”. Formúlese ahora el problema a un geómetra: formará un triángulo, prolongará uno de sus lados, etc., y obtendrá el resultado mediante un encadenamiento de razonamientos guiado continuamente por la intuición. Tesis semejantes han sido retomadas por Cournot, Goblot y, más refinadamente, por los matemáticos intuicionistas modernos. No obstante, es posible llegar a otra conclusión: si se considera que el llamado a la intuición constituye una falla dentro de una construcción que ha sido presentada como lógica, uno se propondrá corregir los métodos clásicos de demostración de modo que se sustituya la intuición por su equivalente intelectual, lo cual por lo demás le resulta necesario dentro de las nuevas geometrías en las que los espacios no se dejan ya representar por la intuición.

Cuando se hace necesario recurrir a las figuras, esto se hace claro porque resulta evidente que el ojo dice cosas que el texto, que se dirige sólo a la inteligencia, sobreentiende. Es tal la fuerza de la intuición que no se hace sentir su ausencia. Por ejemplo, no hace ni un siglo que se hizo notar que en parte alguna Euclides enunció la proposición siguiente y que, sin embargo, no deja de utilizar: si una recta tiene dos puntos dentro de un plano, éste la contiene en su totalidad. En las exposiciones de la geometría clásica, un análisis atento logra descubrir una gran cantidad de proposiciones implícitas. En primer lugar las de existencia, la posibilidad de elaborarla dentro de la intuición demuestra, seguramente, que la idea de la que se trata no incluye una contradicción. Pero se trata de una prueba de hecho y no de una justificación racional. A continuación, las proposiciones referidas a la congruencia, y que se encuentran implicadas en operaciones diversas a las que el geómetra se entrega mentalmente, como hacer retroceder una figura para hacerla coincidir con su trazo. En los *Elementos* no se enuncia en forma expresa más que una sola proposición de esta naturaleza y que, por otra parte, se encuentra clasificada entre los axiomas. Mencionemos también las proposiciones en las que se enuncian propiedades topológicas, esto es, las que se refieren al orden y la continuidad, dejando de lado toda consideración a los ángulos y a la métrica.[4]

Euclides y sus continuadores hasta el siglo XIX silenciaron por lo general tales propiedades empleándolas, no obstante, a cada paso, pues la figura las sugería suficientemente. Queda claro que un método riguroso no puede permitir que la intuición se emplee continuamente como un recurso, sino que demanda que todas las propiedades supuestas se enuncien claramente como proposiciones, aquellas que queden demostradas serán consideradas como teoremas y las restantes aumentarán el número de los postulados.

4. Los axiomas

Al lado de los postulados se colocan, por lo general, los axiomas para completar los principios de la geometría. Son el otro nombre que se da a las “nociones comunes” y a las definiciones de Euclides. ¿Desde el punto de vista de la lógica tal ordenamiento queda justificado?

La diferencia entre axioma y postulado ha sido, con frecuencia, poco clara. Comúnmente ambas expresiones fueron, y siguen siendo, tomadas indiferentemente una por otra. Prueba de esto es el mismo nombre de la axiomática que, sin duda, podría llamarse, con mayor precisión, postulática. Los editores de los libros de Euclides encabezan los *Elementos* con aquellas propiedades que el griego postuló a lo largo de sus demostraciones, y las han colocado tanto a continuación de las “peticiones” como después de las “nociones comunes”. En la medida en que se diferencia del postulado, el axioma comprende en primer lugar la idea de una prueba intelectual. En tanto, el postulado constituye siempre una proposición sintética cuya contradictoria, difícil o imposible de imaginar, queda, de todas formas, como algo concebible; el axioma sería una proposición analítica que resultaría ab-

[4] Consideremos una figura dibujada sobre una lámina de hule, la cual se pueda doblar y estirar. Las propiedades de la figura que se mantienen sin variación son las topológicas. Por ejemplo, de cuatro puntos situados sobre una curva continua y abierta, si C se encuentra entre A y D, y si B entre A y C, entonces B se encuentra entre A y D.

surdo negar. Además, su función sería exclusivamente la de un principio puramente formal que regularía el paso del razonamiento aunque sin ofrecerle, al contrario de los demás principios, sustento alguno. Estas dos ideas se conjuntan en la tesis, propalada por mucho tiempo —aunque nunca justificada mediante un análisis exacto—, que convertía a los axiomas en meras especificaciones de las leyes lógicas que se aplican a la cantidad.

Ahora bien, la idea de evidencia despierta cada vez más la desconfianza del matemático. El sentimiento de evidencia resulta engañoso y su dominio varía de acuerdo con el temperamento intelectual de cada quien. Si uno intentara buscar apoyo en él, los espíritus inclinados hacia lo intuitivo solicitarían, indudablemente, que más de una demostración fuera suprimida; que, para ellos, resultara menos evidente el teorema que justifica tal demostración. Aquellos que fueran más exigentes se negarían a reconocer como incondicionalmente necesario tal teorema. Resulta cierto que algunos axiomas euclidianos han experimentado una cierta degradación: uno de ellos el que enuncia que el todo es mayor que la parte y, que en cierto sentido, no es válido[5] sino para los conjuntos que son considerados finitos, y que podría servir, como ha sido sugerido, para definir tales conjuntos. De este modo, no se trata ya de una proposición analítica sino de una convención destinada a delimitar un campo determinado y a la que no está sujeta el espíritu. Por otra parte, el papel que se ha hecho desempeñar a la evidencia por un tiempo bastante largo se encuentra ligado al ideal de las matemáticas categóricas, dentro de las cuales aquello que no está demostrado debe, de algún modo, demostrar sus títulos para ser considerado verdadero. Esto queda afinado dentro de una idea hipotético-deductiva cuyo centro es la coherencia lógica más que la verdad absoluta. Al colocar de este modo en primer plano la idea de sistema, se hace necesario reducir a un número menor las proposiciones independientes. Pero si uno se empeña de este modo en la demostración de los sistemas, esto se hace con un espíritu muy distinto al que inspiró a Leibniz cuando se formuló la misma exigencia, puesto que no se trata ya de reducirlos a proposiciones idénticas con el fin de hacer resplandecer su evidencia, sino meramente de reducir la base del sistema al mínimo haciendo aparecer los principios de los cuales se derivarán los sistemas en forma intuitiva y menos evidente que aquéllos.

Estas últimas consideraciones tienen valor, ciertamente, en lo que se refiere a la verdad material de las proposiciones y pierden fuerza al ser aplicadas a los principios formales o reguladores. La teoría clásica carece aún de claridad sobre este

[5] Dentro del sentido en el cual “es mayor que”, se entiende: “tiene una potencia superior a” (véase la nota del inciso 26). Así, el axioma deja en efecto de valer para los conjuntos infinitos dentro de los cuales, no obstante, el todo “contiene en exceso” a la parte.

punto. Coloca los axiomas en situación intermedia entre las proposiciones lógicas y las geométricas.

Las primeras tienen carácter regulador y se refieren a la cantidad al igual que las segundas. Pero, o bien pueden ser obtenidas mediante la aplicación de los principios de la lógica a las ideas iniciales de las matemáticas y, en ese caso hacerlo eliminándolas del número de las proposiciones primeras de la geometría y contarlas como meras proposiciones de lógica aplicada; o bien se rebelan contra esta reducción y su resistencia se hace manifiesta en su carácter de postulados. Conviene, entonces, disociar los sistemas de modo que parte de ellos pase a los postulados y la otra quede fuera de la geometría. No les quedará ya lugar entre los principios de la geometría, al mismo nivel y junto a los postulados.

5. Las definiciones

Con menor razón es necesario incluir las definiciones entre los primeros principios. Puede encontrarse aquí un error lógico considerable que un momento de reflexión basta para disipar. Queda justificado el recurso de las proposiciones primeras de invocar la imposibilidad de que todo pueda ser demostrado. O las mismas razones que pueden hacerse valer para una demostración tienen el mismo valor para la definición. Un término se define mediante otros términos y éstos, a su vez, mediante otros términos, de modo que para impedir que se produzca una regresión al infinito se hace necesario detenerse en algunos términos aún no definidos, del mismo modo que las demostraciones necesitan apoyarse en algunos términos aún no demostrados. Estos términos irreductibles constituyen, por retomar una proposición de Russell, una especie de alfabeto geométrico. Sirven para deletrear, esto es, entran como elementos para componer las definiciones, mas son indefinibles, y éstos son los que es necesario enunciar al frente de la teoría deductiva y de ninguna manera las definiciones que intervendrán, más tarde, para sustituir con un término nuevo y más simple, una expresión elaborada, en forma directa o por medio de definiciones intermedias, mediante la ayuda de los términos primeros, de la misma forma en que intervienen las demostraciones para justificar proposiciones nuevas con ayuda de las proposiciones primeras.[6]

Del *mismo modo,* las “definiciones” iniciales de Euclides sólo tienen de definiciones la apariencia. Pueden reducirse a meras descripciones empíricas semejantes a las de un diccionario cuyo objeto fuera dirigir el espíritu a la idea de que se trata. Propiamente se trata de *designaciones.* Es por esto que casi no logran satisfacer

[6] Tal analogía funcional entre definición y demostración fue bien apuntada por Pascal en su *De l'esprit géométrique.*

la función que al parecer se les asigna, la de enunciar propiedades fundamentales que se utilizarán con el fin de obtener a partir de ellas todas las demás dentro de las que figurará el término definido.

Euclides hace la definición siguiente de la línea recta: la que descansa igualmente sobre sus dos puntos. Herón la sustituye con la siguiente definición al parecer más clara: el camino más cercano o más corto entre dos puntos. Leibniz hace notar con toda razón que en la mayoría de los teoremas que se apoyan sobre la línea recta no se hace uso de ninguna de esas dos propiedades. Así, por una parte, tales definiciones resultan superfluas y, por la otra, ocultan la ausencia de las proposiciones que enuncian las propiedades útiles, como la siguiente, que explicarán posteriormente los editores de Euclides: dos rectas no encierran un espacio. Tal falta de acuerdo entre las propiedades enunciadas en la pseudodefinición y las posteriormente utilizadas con efectividad, integran una falta de lógica que resulta muy grave pues hace nacer la sospecha acerca de la identidad de la noción. ¿Qué puede asegurarnos que la línea recta de la que hablan los teoremas sea la misma que se demandaba presentar a la definición?

Las exposiciones clásicas de la geometría, ya se trate de definiciones falsas iniciales o de definiciones verdaderas ulteriores, y dicho esto en forma general, cometen con frecuencia el error de presentar como fórmulas en apariencia simples y en las que se mezclan dos enunciados de naturaleza totalmente distinta, una proposición y una denominación. No cabe duda de que en esta confusión se encuentra el origen de la tesis propagada durante mucho tiempo y según la cual las definiciones son los principios fecundos de los cuales los teoremas obtienen toda su sustancia. Véase la definición número 15 de Euclides: un círculo es la figura plana terminada por una línea tal que todas las líneas rectas que la unen en un determinado punto interior a la figura son iguales entre sí. Esto quiere decir dos cosas: 1) es posible terminar una figura plana por una línea recta tal que, etc., y 2) se denominará círculo a una figura tal. Este último enunciado, para el que sería más propio guardar el nombre de definición, dado que el primero es, de hecho, una aserción, pertenece exclusivamente al lenguaje y, en rigor, no aporta un contenido nuevo a la ciencia de la geometría. Se trata de una decisión o de una convención que acorta el discurso y que por lo tanto puede justificarse por su comodidad aunque no tenga nada que ver con la verdad. No se sigue de aquí que, arbitrariamente, pueda uno afirmar la proposición correspondiente: aquella es verdadera o falsa y, en este caso, origen de verdades o contradicciones posteriores. Así, si se descarta el llamado a la intuición, bastante claro, considerándolo inadecuado, se hace necesario demostrarla como teorema o establecerla como un postulado.

La utilidad de esta exigencia lógica se verá mucho mejor si la definición reúne bajo el mismo término un número mayor de propiedades heterogéneas, pues de este modo no basta que cada una de ellas sea posible, sino que resulta necesario que, dentro del conjunto, sean integrables. Si uno no confirma su compatibilidad queda expuesto a cometer lo que fue denunciado como "error de definición compleja" de acuerdo con Saccheri, como si se intentara definir un poliedro regular cuyas caras fueran hexágonos.

6. Demostración y definición

De este modo, parece ser que en el punto de partida de una teoría deductiva que haya sido pensada de modo que satisfaga las exigencias lógicas, figurarán no sólo los tres principios tradicionales: definiciones, axiomas o postulados, sino de proposiciones no demostradas —que en forma indiferente podrán ser denominadas axiomas o postulados— y los términos no definidos. Todo el trabajo posterior consistirá en elaborar a partir de ahí nuevas proposiciones que deberán ser justificadas recurriendo a demostraciones y términos recién acuñados fijados mediante definiciones. Demostración y definición son, en consecuencia, las dos operaciones fundamentales por medio de las cuales puede desarrollarse una teoría deductiva. Pero, ¿qué condiciones debe llenar una buena demostración o una buena definición? Tal cosa dependerá del fin asignado a estas operaciones. Y, ahondando en este punto, las exposiciones clásicas de la geometría con frecuencia carecen de claridad. Parece que se proponen, al mismo tiempo, dos cosas distintas que no necesariamente se concilian. En este caso, sin duda, la confusión no puede imputarse a Euclides sino al ya muy prolongado uso pedagógico que se ha hecho de sus trabajos. Pero se tiende también a mantener ese rasgo de la geometría clásica de intentar unir la verdad material de las proposiciones con la verdad formal de su concatenación, la exactitud empírica y el rigor lógico.

Si se coloca en primer plano la verdad del contenido, la demostración y la definición se convierten en simples medios para establecerla. El papel que desempeñará la demostración será el de hacer concebir con toda precisión el sentido de los términos que integran las proposiciones; y el de la demostración hacer que se admita la verdad de éstas. De este modo puede decirse que la definición y la demostración dependen, hablando con propiedad, de la retórica, y su función resulta, esencialmente, psicológica, ya sea pedagógica o didáctica. Por lo contrario, en la otra hipótesis sólo tienen una función lógica, la de reunir todos los términos y todas las proposiciones de modo que integren un conjunto sistemático. Queda claro, desde el principio, que las dos exigencias, eficiencia psicológica y rigor lógico, tiran en ocasiones en direcciones opuestas, pues tan pronto se vincula uno a la primera, el valor de una demostración o de una definición se hace relativo e incluso doblemente relativo. Una demostración o una definición no pueden ser más buenas o más malas sino sólo mejor o menos buena que otra, y tal cualidad varía de acuerdo con el lector o el oyente. En términos pedagógicos, la definición o la demostración buena es la que el alumno entiende. Y esto nos puede llevar muy lejos: para un niño la definición verdadera de una elipse no es la que aprende de memoria, sino que se parecería más a lo que expresaría como "un círculo alargado". La demostración buena no es la que apunta en su cuaderno sino la figura que va acompañándola. Si el argumento más eficaz es sólo el de la demostración buena, ¿dónde tendrá uno que detenerse? Es conocida la anécdota del preceptor de un príncipe que, al ver terminados sus recursos, hizo que su teorema fuera admitido al exclamar con irritación: "¡Señor mío, os doy mi palabra de honor!"

Todo parece indicar que, entre los mismos matemáticos, ambas funciones no siempre han estado disociadas en forma clara. De otro modo no se entendería que más de uno haya compartido el asombro que provoca en el lego una demostración de Euclides: ¿por qué ese afán de convencernos mediante un razonamiento difícil de asuntos de los que estamos perfectamente seguros o, también, de demostrar lo más evidente recurriendo a lo menos evidente? La *Lógica* de Port Royal cuenta entre "los defectos que de ordinario pueden encontrarse en el método de los geómetras, probar cosas que no requieren de prueba". Algunos buscan explicaciones y excusas, entre ellos Clairaut:[7] "Que Euclides se tomó el trabajo de demostrar que dos círculos que se cortan no tienen el mismo centro, y que en un triángulo que se encuentra encerrado en otro la suma de sus lados es más pequeña que la del triángulo que lo encierra. Uno no debe sorprenderse de esto, pues este geómetra tenía que convencer a sofistas muy tercos que gustaban lucirse rechazando las verdades más evidentes. En consecuencia, resultaba necesario que la geometría tuviera, al igual que la lógica, la ayuda de razonamientos de mala fe" Y añade Clairaut: "Pero actualmente las cosas han cambiado y todo razonamiento que cae dentro de lo que el buen el buen sentido ha decidido de antemano resulta hoy en una pura pérdida y sólo resulta adecuado para oscurecer la verdad y molestar a los lectores." La misma idea fundamental del papel que desempeña la demostración puede encontrarse en el filósofo Schopenhauer quien, con menos indulgencia, considera francamente "absurdo" el método de Euclides y su manía de sustituir la intuición por el discurso. Afirma que esto es como si un hombre se cortara las piernas para poder caminar con muletas.

No obstante, el "absurdo" que allí se encuentra, ¿no debería hacernos sospechar acerca de si probablemente uno se equivoca con respecto a las intenciones de Euclides? Que sea posible, como lo hace Pascal, observar el razonamiento geométrico como un modelo del arte de convencer. Él mismo parte del hecho de que persuadir no quiere decir que eso sea su función primera y esencial. Sabemos en efecto que muchas de las proposiciones de Euclides eran ya conocidas antes de que él las

[7] *Éléments de géométrie,* 1741, apud, F. Gonseth, *La géométrie et le probléme de l'espace,* t. II, p. 141.

expusiera y casi no existe duda alguna de que todos los expertos las hayan considerado verdaderas. Sólo requerían ser organizadas en forma lógica, unirlas mediante una malla bien cerrada. Euclides, al parecer, es lo que intentó hacer y, en todo caso, lo que hizo. Tal es el propósito cada vez más afirmado por el matemático. "Desde los tiempos de Clairaut las cosas han cambiado de aspecto" nuevamente. "Dentro del sistema de todos los juicios verdaderos", escribía Bolzano, "impera una conexión objetiva que es independiente respecto a la contingencia de que la conozcamos de manera objetiva; y por tal conexión ciertos juicios constituyen la base de otros."[8]

En adelante, ir desprendiendo tales conexiones objetivas parecía ser el fin verdadero de la teoría deductiva. Al tiempo mismo que la certidumbre subjetiva se deja a un lado la verdad material de las proposiciones; de este modo las matemáticas se convierten en hipotético-deductivas. Desde los inicios del siglo XIX la separación entre ambas concepciones, la ciencia y la demostración matemática, fue señalada en forma perfectamente clara por Dugald Stewart[9] filósofo olvidado por el descrédito en que cayó la escuela escocesa: "En las matemáticas nuestros razonamientos… no tienen ya como fin comprobar *verdades* acerca de existencias reales, sino determinar la filiación lógica de las consecuencias que se derivan de una *hipótesis* determinada. Si a partir de esta *hipótesis* razonamos con toda exactitud, queda manifiesto que no le podría faltar nada a la evidencia del resultado, pues éste se limita a afirmar un enlace necesario entre suposición y conclusión… De tales proposiciones no puede decirse que sean *verdaderas y falsas* por lo menos en el sentido en que se denomina proposiciones relativas a los hechos… Cuando se dice de estas proposiciones que unas son *verdaderas* y las otras *falsas,* tales adjetivos califican sólo su conexión con los *data,* no su relación con las cosas que existen en la realidad o con acontecimientos futuros."

Del mismo modo que la definición se mueve entre ser una función psicológica (la forma de determinar el asentimiento) y una función lógica (organizar en un sistema las proposiciones), también la definición se coloca en ocasiones dentro del plano de pensamiento, en otras en el del discurso y, con mucha frecuencia, intenta hacer ambas cosas. Se dirige, tal como lo sugiere su nombre, a delimitar la comprensión de una idea, pero también a sentar una equivalencia lógica entre un término recién acuñado y el conjunto de términos ya aceptados, de este modo el medio se transforma en un nuevo fin que se añade frecuentemente al primero, pero sin eliminarlo. Viene de aquí la confusión que puede observarse en las matemáticas casi contemporáneas. Recordemos la burla que hizo Poincaré acerca de la defini-

[8] *Philosophie der Mathématik,* 1810, apud, Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme,* pp. 46-47.

[9] *Éléments de la philosophie de l'esprit humain,* vol 1I, 1813, traducción del alemán al francés de L. Peisse. Los subrayados son del autor.

ción del número 1 en la aritmética que se encuentra simbolizada en la Escuela de Peano: "Se trata de una definición que es eminentemente muy propia", afirma irónicamente,[10] "¡para quienes jamás hayan oído hablar de este número!"

Uno de los primeros beneficios que se obtendrán a partir del método axiomático será el de eliminar tales confusiones al separar las matemáticas puras, que son una ciencia formal, de las matemáticas aplicadas, que son una ciencia de lo real. O, por decirlo en términos más claros, obligando a que se tome partido y se escoja entre dos lecturas de una misma teoría matemática, ya sea que uno se interese en ella por coherencia lógica o como verdad empírica.

[10] *Science et méthode,* p. 168.

II. LAS AXIOMÁTICAS INICIALES

7. El nacimiento de la axiomática

En tanto que la geometría intentaba, recurriendo a sus proposiciones enseñar verdades, la forma racional que se ha dado a la presentación de la ciencia podría tener la apariencia de una especie de refinamiento intelectual, considerándose entonces el encadenamiento lógico sólo como el medio para lograr proposiciones verdaderas, o bien que fueran aceptadas ajustándose a una suerte de argumentación retórica *ex praecognitis et praeconcessis* que hacía aceptable algunos defectos de rigor, puesto que éstos eran suplidos por la intuición. Así se alcanzaba el resultado y no se comprometía la certidumbre de la ciencia. La pluralidad de geometrías existentes en la actualidad hace que no ocurra ahora lo mismo, dado que se pierde interés en la verdad material del contenido, y la validez de una geometría se hace descansar sobre la armazón lógica y cualquier falta hace que ésta se derrumbe, puesto que son violadas las reglas del juego si uno se apoya en la intuición.

Otra razón impulsaba en el mismo sentido incuso a aquellos que continuaban dando importancia esencial a la verdad extrínseca de las proposiciones: la desconfianza creciente que provocaba la intuición espacial. Toda la historia de la geometría es testigo de la tendencia continua a limitar más y más sus alcances y a hacer crecer, en proporción, sus exigencias lógicas. En el siglo XIX, la "aritmetización del análisis" imprimió a este movimiento una aceleración considerable a la que contribuyó el surgimiento de las geometrías opuestas a la intuición. De este modo se produjeron apartamientos notables entre las sugerencias mentirosas de la intuición y lo que la demostración nos enseñaba sin que cupiera duda. Una proposición que todos tomaban por verdadera aparecía equivocada, y otra que hubiéramos aceptado sin vacilar debería ser probada. Por citar sólo dos ejemplos famosos, resulta falso que a una línea curva continua siempre se le pudiera trazar una tangente (Weiertrass); también puede ser cierto que una línea curva, que no tenga ninguna anchura, pueda cubrir la superficie total de un cuadrado (Peano).

Pasch, en 1882, intentó lograr la axiomatización inicial de la geometría. Si bien la solución que ofreció presenta una cantidad considerable de fallas, debidas en buena parte a que el autor mantuvo la misma actitud del empirismo clásico, al menos plantea claramente cuál es el problema: "Resulta necesario para que la geometría logre transformarse en una ciencia deductiva, que el modo de extraer una consecuencia sea, en todas sus partes, independiente de la *idea* del concepto geométrico. Al hacer una deducción, bien puede resultar conveniente y útil razonar acerca del significado de los conceptos de la geometría más usuales, pero esto *de ninguna manera es necesario* cuando en la deducción se presenta una laguna y (si no es posible suprimir tal laguna alterando el razonamiento) si las proposiciones que han sido tomadas como medios de prueba resultan insuficientes.[11]

Ponemos a continuación las condiciones fundamentales que, para que se le considere verdaderamente rigurosa, debe llenar una exposición deductiva:

1) Que los términos primeros, con los cuales se propone uno definir a todos los otros, sean enunciados claramente.
2) Que las proposiciones primeras, con las cuales se propone uno demostrar todas las otras, sean enunciadas claramente.
3) Que las relaciones que se enuncien entre los términos primeros sean sólo relaciones lógicas y que se mantengan independientes del sentido concreto que pueda darse a los *términos.*
4) Que sean sólo estas relaciones las que puedan intervenir en las demostraciones en forma independiente del sentido que tengan los términos (esto prohíbe, particularmente, tomar en préstamo cualquier cosa concerniente a la consideración de las figuras).

8. La anterioridad de un sistema

Las reglas establecidas por Pasch conllevan la distinción clara entre términos y proposiciones *propias* al sistema axiomatizado y aquellos que, lógicamente, le son *anteriores.* Si, por ejemplo, estamos tratando con la geometría, los términos propiamente geométricos que figuren en las proposiciones primeras no pueden, por supuesto, formar proposiciones salvo en el caso de que se encuentren unidos entre ellos por palabras que desempeñen una función lógica, por ejemplo, *el, todo, no, es un, si, entonc*es, etc. Del mismo modo, las demostraciones no invocan sólo a las proposiciones del sistema puesto que, para integrarlas en demostraciones, resulta necesario recurrir a las reglas lógicas del encadenamiento, como aplicar la regla de la transitividad de la implicación (si a implica b y si b implica a c, entonces a implica a c). El conocimiento —si bien no teórico sino al menos operatorio— de la lógica queda entonces presupuesto en este caso. En relación con la ciencia axiomatizada de tal forma, a la lógica se le da el nombre de *anterior.*

Un sistema geométrico, aparte de la lógica, da por supuesto a la aritmética, pues para definir un triángulo es necesario utilizar el *tres;* asimismo, para demostrar que la suma de sus ángulos es igual a dos rectos, se hace necesario admitir la

[11] M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie,* 1882, p. 98.

validez de los teoremas aritméticos relativos a la adición. En forma general, se denominará *anteriores* a un sistema axiomático a todos los conocimientos del sistema así llamado. Se verá entonces que si una axiomática aparece como un sistema puramente formal, los conocimientos que necesita para constituirse son nociones entendidas en la totalidad de su sentido, así como tesis tomadas en su verdad material.

Recurrir a los conocimientos anteriores, especialmente si no se expresa declaradamente, choca con el espíritu de la axiomática, que se impone como deber tratar de explicarlo todo, sin que nada quede presupuesto. Queda claro que esto se puede matizar mediante el recurso de enumerar, al iniciar una axiomática, las ciencias que se presuponen. Tal formalidad no basta en forma alguna para resolver la infinidad de problemas que emergen aquí y cuya determinación resultará fundamental para los posteriores desarrollos de la axiomática. En especial, ¿será posible, como sugiere de inmediato el afán de conseguir una lógica pura, remontar la axiomatización de la ciencia hasta un punto último, de la geometría a la aritmética y de ésta a la lógica con el fin de absorber los conocimientos que se han utilizados hasta entonces como anteriores —y que en consecuencia se mantienen como exteriores— a la axiomática y eliminar así por completo toda presuposición intuitiva? O de otro modo, los conocimientos elementales de lógica e incluso de aritmética, ¿no se les utilizaría en forma necesaria a título operatorio en la construcción de las axiomáticas? O, dicho de otro modo, los conocimientos elementales de lógica e incluso de aritmética ¿no se les utilizaría necesariamente en la elaboración de las axiomáticas lógicas y aritméticas? Poincaré apuntaba que resulta difícil "hacer el enunciado de una frase sin colocar un número o, por lo menos, la palabra varios o, en última instancia, una palabra en plural".[12] El aritmético y el lógico *numeran* sus proposiciones y teoremas, *cuentan* el número de sus nociones primeras. Y lo que es cierto en el caso de las nociones aritméticas con mayor razón lo es para las nociones lógicas.

Por otro lado, no siempre resulta fácil delimitar con precisión la frontera entre lo que son las nociones propias de una ciencia y las que le resultan anteriores.[13] Podemos leer por ejemplo en un tratado de geometría: "La recta *a pasa por* el punto A." La frase *pasa por* pertenece aparentemente al vocabulario de la geometría; pero como es posible evitarla al decir: "El punto *A pertenece* a la recta *a*", y que la pertenencia de un individuo a una clase (si se considera a la línea como una clase de puntos) es una noción lógica, el término *pasa por* debe en este caso ser incluido entre los términos lógicos. Un poco más allá podemos leer las dos frases: "Si un punto está dado *fuera* de un plano", etc., y también: "Si un punto está dado *fuera de una superficie esférica*", etc., ¿cómo se puede clasificar ese *fuera de?* En el primer caso

[12] H Poincaré, *Science et méthode*, p. 166.

[13] Los ejemplos puestos a continuación son de Padoa, "La logique déductive", *Rev. de Métaph. Et de Morde*, nov. de 1911, pp. 830-831.

citado simplemente se dice que el punto *no pertenece* al plano, tratándose entonces de un término lógico. Pero en el segundo caso lo que se quiere decir es algo más. No sólo que no pertenece a la superficie de la esfera sino también que no se encuentra situado en el *interior* de ésta. Por tanto, el mismo término debe ser considerado como propio de la geometría.

Podría creerse que la enumeración hecha por separado de los términos de un sistema resultaría totalmente superflua, puesto que tales términos no son los que se pueden encontrar en las proposiciones primeras. Cierto es que en las primeras axiomáticas no siempre solía tomarse tal precaución.[14] En algunas ocasiones resulta difícil reconocer en las proposiciones cuáles son los términos propios de la teoría, por lo que, se comprende, es necesario dar una lista exacta de ellos.

9. Indefinibles e indemostrables. Los sistemas equivalentes

Una de las características que definen en forma más visible que una teoría deductiva ha sido puesta en forma axiomática es, como se ha visto, que se comienza a despejar y enunciar en forma expresa y exhaustiva lo que son los indefinibles y los indemostrables de la teoría. Tal formulación demanda empero, si bien no correcciones, al menos alguna interpretación.

En primer lugar, no resulta lógicamente necesario que todos los términos fundamentales y los postulados se presenten en conjunto desde el principio de la teoría y que queden agotados antes de que se inicien las definiciones y demostraciones. En vista de que una teoría axiomatizada alcanza un buen grado de complejidad, un procedimiento semejante pondría en riesgo la exposición sin lograr ventaja lógica alguna. En tal caso se considerará con frecuencia preferible avanzar en grados sucesivos y no ir presentando las nuevas nociones fundamentales con los postulados correspondientes a medida que vaya siendo necesario, ya sea en forma aislada o en grupo, con la condición bien entendida de que todo se haga en forma muy clara. Falta decir que la mención de términos aún no definidos y de las proposiciones no demostradas, debe preceder siempre la de los términos y las proposi-

[14] Se daba también, indudablemente, dentro de esta diferencia de tratamiento entre términos y proposiciones, el efecto del curioso retardo de la teoría de los términos, del cual encontramos ya una manifestación en la costumbre secular de enumerar las definiciones dentro de los principios. Al respecto, Padoa hace la observación de que, si se dispone desde hace mucho tiempo de la voz *postulado,* con que se designan las proposiciones no-demostradas, no se ha inventado una voz que designe los términos no-definidos, dado que esta expresión se usaba tan poco que no se consideraba necesario abreviarla. La palabra *teorema,* que carece de una voz para designar los términos definidos, se encontraría en el mismo caso.

ciones de éstos derivadas, mediante demostración o definición, y es sólo en este sentido relativo que merecen ser definidos como primeros.

Del mismo modo que las palabras *primero* y *comienzo, indefinible* e *indemostrable* sólo deben ser entendidas en sentido relativo. Existe la tendencia creciente a evitarlas de modo que se eviten las equivocaciones. Un término no puede ser indefinible del mismo modo que una proposición no puede ser indemostrable, salvo al interior de un sistema que ha sido estructurado en una forma determinada, y de manera continua pueden constituir el término de una demostración o una definición, siempre que se modifiquen adecuadamente las bases del sistema. Tengamos siempre en cuenta el ejemplo de la geometría euclidiana: no resulta imposible de ninguna forma demostrar en ella el postulado de las paralelas. De este modo, en lugar de demostrar por medio de aquella que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos o que a toda figura se le puede hacer corresponder una figura semejante de cualquiera magnitud o que por todo punto interior de un ángulo es posible trazar una recta que corte ambos lados, resulta imposible invertir este orden y podrá demostrarse la unicidad de la paralela tomando como postulado cualquiera de estas últimas proposiciones. Del mismo modo, la elección de los términos de la teoría que se instituirán como fundamentales queda al libre albedrío. Un cambio en la lista de los términos primeros basta para determinar el cambio correspondiente en los postulados, pues éstos enuncian relaciones entre esos términos.[15]

Resulta necesario entonces vigilar, al hablar de un sistema deductivo, que no se confundan dos acepciones de la voz *sistema,* esto es, el conjunto de las nociones y proposiciones que lo integran, ya sean primitivas o derivadas, así como cualquier organización lógica que se le dé.

Un sistema, entendido como el conjunto de las nociones y proposiciones que lo integran, se presta a una multitud de representaciones axiomáticas. Por emplear una definición de Nicod, se trata de algo parecido a un poliedro, que puede descansar sobre gran variedad de bases. Tales sistemas distintos, en el sentido de organización lógica, reciben el nombre de *equivalentes.* De este modo, todas las reconstrucciones axiomáticas de la geometría euclidiana resultan equivalentes, pues en el fondo contienen el mismo conjunto de términos y proposiciones y sólo difieren en que éstos pueden dividirse en primitivos y derivados. De modo más general y también más preciso, dos sistemas de proposiciones son equivalentes si cualquier pro-

[15] La escuela italiana mediante la analogía, aclaró perfectamente, recurriendo a lo que ya se conocía respecto a las proposiciones, el carácter, relativo, de una noción de ser primera. Se verá no obstante que si bien lógicamente la relación de anterioridad de una proposición o un término en relación con otro es del todo arbitraria, esto no significa que sean válidos todos los órdenes. La concepción de un orden natural de nociones y aserciones (Pascal y Leibniz) no ha perdido valor si se dirige a un orden *racional,* bien distinguido, de un orden que sólo es *lógico.*

posición de uno de ellos puede demostrarse sólo con la ayuda de las proposiciones del otro, y recíprocamente, dos sistemas de términos son equivalentes si cualquier término de uno puede definirse con la sola ayuda de los términos del otro.

10. Las definiciones por postulados

El estatuto lógico de los postulados queda bastante claro, no quedan afirmados a título de verdades generadoras de otras verdades, sino que sólo se les coloca a título de hipótesis que permiten deducir un conjunto dado de proposiciones o de las que uno se propone investigar las consecuencias que implican. Se sabe que en forma alguna resulta necesario que las proposiciones sean verdaderas y que sean conocidas como tales para que sea posible razonar sobre ellas correctamente; la validez de un razonamiento es independiente de la verdad de su contenido. La condición de los términos primeros es un tanto más difícil porque, si es posible hacer abstracción total de la verdad de las proposiciones sobre las que se trabaja, ¿es posible también hacer abstracción total del sentido de los términos? ¿Cómo afirmar de ellos algo así aun a título hipotético si para nosotros están totalmente despojados de sentido? Y, ¿cómo llegar a un sentido si, por un lado, no podemos definirlos y si, por el otro, nos negamos a tomar en cuenta su sentido intuitivo previo? Esto porque si no se obliga uno a olvidar su sentido empírico, preaxiomático, se corre el gran riesgo de referirse luego a él, sin saberlo, dentro del razonamiento y, así, introducir subrepticiamente elementos implícitos más o menos vagos y, sin duda, variables con cada uno. Sólo nos queda una respuesta: el sentido que tengan lo fijará su uso en los postulados que enuncian qué clase de relación lógica tienen entre sí tales nociones. Este modo de determinar el valor de un término no puede considerarse propiamente una definición pues no establece una equivalencia lógica entre el término nuevo y una expresión conocida. Mas en vista de que sí cumple la función de una definición, esto es, fijar su significado, puede considerársele como una definición implícita.

Esta noción se debe a Gergonne. "Si una frase", observa, "contiene una sola palabra cuyo significado no es desconocido, el enunciado de esa frase bastaría para revelarnos su valor. Así, si se dice a una persona que conoce las voces *triángulo* y *cuadrilátero,* pero que nunca ha escuchado la voz *diagonal,* que cada una de las dos diagonales de un cuadrilátero lo divide en dos triángulos, imaginará de inmediato lo que es una diagonal, pues aquí se trata de la única línea que es capaz de dividir un cuadrilátero en un triángulo. Esta suerte de frases que dan la comprensión de una de las palabras de que se componen recurriendo al significado conocido de las otras podrían ser denominadas *definiciones implícitas* en oposición a las definiciones ordinarias que recibirían el nombre de *definiciones explícitas."*[16] Este procedimiento no tiene nada de extraño. Es del mismo modo como el niño aprende el sentido de la mayoría de las palabras de su idioma. En el campo de las ciencias físicas resulta común que una ley que ha sido establecida recurriendo a la ayuda de nociones provisionales permita, a cambio, precisar su sentido. El nominalismo científico se basaba en esto para establecer que las leyes son con frecuencia sólo definiciones disfrazadas. La ley de la caída de los cuerpos define la *caída libre;* la ley de las proporciones definidas caracteriza la *combinación* en oposición a la mezcla, etc. Las definiciones indirectas pueden compararse a una ecuación con una sola incógnita y cuyo valor lo fija el conjunto de la ecuación.

Tal definición resulta unívoca si, en el ejemplo de Gergonne, un solo valor puede satisfacer la ecuación, pero no siempre es así. En especial, si tomamos en cuenta todo un sistema de ecuaciones con varias incógnitas, ocurrirá entonces que varios sistemas de raíces satisfagan las ecuaciones, e incluso una infinidad, como si se estableciera:

$$Y = 2x$$
$$Z = y+x$$

En un sentido el sistema queda determinado, pues si se da a una de las incógnitas algún valor arbitrario, los de las otras dos quedan fijados también de inmediato. En vez de individual la determinación es, de alguna forma, global, y asume un carácter más abstracto. En nuestro ejemplo, y siempre será el doble de x y z el triple. Más que los propios términos, son, como puede verse aquí, las *relaciones* entre los términos las que quedan exactamente determinadas. La caracterización de los términos primeros por las relaciones que enuncian entre ellos los postulados nos pone en una situación análoga. Un sistema de postulados puede compararse a un sistema de ecuaciones que tenga varias incógnitas; estas incógnitas se corresponden a los términos de la axiomática que se considera. Su valor no es cualquiera, pero no se encuentra determinado *implícita, solidaria, equívocamente.* Esta forma de establecer el sentido de los términos se considera un caso de definición implícita, la *definición por postulados.* Se entiende así por qué Poincaré podía afirmar, refiriéndose a los postulados de la geometría euclidiana, que se trata de definiciones disfrazadas. El *conjunto* de postulados euclidianos constituye, de hecho, una definición implícita del *conjunto* de las nociones euclidianas.[17]

[16] Gergonne, *Essais sur la théorie des définitions,* 1818, pp. 22-23, apud F. Enriques, *L'évolution de la logique,* p. 94 de la traducción al francés.

[17] La ambigüedad de tomar las definiciones por postulados —y que como se verá después es para los sistemas axiomáticos lo contrario de un defecto— explica los casos de *dualidad* reconocidos anteriormente en varias teorías científicas. De este modo Gergonne expuso sistemáticamente (1826) los

Puede verse mejor ahora que los postulados de una teoría no son proposiciones, esto es, que pueden ser verdaderas o falsas, puesto que contienen *variables* que, relativamente, se encuentran indeterminadas. Únicamente en el momento en que se dé determinado valor a esas variables, o dicho de otro modo, si se les sustituye por constantes, entonces los postulados se convertirán en proposiciones verdaderas o falsas, de acuerdo con la elección que se haya tomado para estas constantes, aunque entonces se sale de la axiomática y se pasa a sus aplicaciones. Con título semejante al de las ecuaciones de un mismo sistema, y no podría haber mejor comparación, los postulados son meras *funciones proposicionales,* expresión de la que no es necesario dar una definición explícita pues, en suma, se encuentra definida en las frases precedentes.

"Las matemáticas son una ciencia en la que no se sabe nunca de qué se habla, ni si es verdadero lo que se dice" Este chiste muy conocido que sugirió a Russell la noción de la matemática axiomatizada tiene valor para toda axiomática en general. Y también es a la axiomática a la que puede aplicarse el siguiente chiste de Poincaré: "Las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas."

11. Dos ejemplos de axiomáticas

Aunque no tiene que ver con la geometría y con que su autor se haya preocupado especialmente por el problema de la expresión simbólica, como primer ejemplo de la axiomática daremos el que elaboró Peano para la teoría de los números naturales. Primero, porque su brevedad nos permitirá exponerla en su totalidad, luego porque puede encontrarse en ella la ilustración simple y notable del carácter de ambigüedad, dado que no conlleva sino tres términos primeros: cero, el número, el sucesor de… y cinco proposiciones primeras que transcribiremos de la notación simbólica al lenguaje común:

1) Cero es un número.
2) El sucesor de un número es un número.

---

inicios de la geometría proyectiva (sin paralelismo) escribiendo en dos columnas: los términos *punto* y *plano* eran cambiados de derecha a izquierda sin que la verdad de las proposiciones se alterara. Por ejemplo, *dos puntos determinan una recta; dos planos determinan una recta; tres puntos, no en línea recta, determinan un plano; tres planos que no tienen una recta común determinan un punto,* etc. Esta dualidad depende de que los términos primeros de la teoría, que son los de *punto* y *recta* (serie de puntos), satisfagan los postulados en que figuran si se les da, respectivamente, el sentido de *planos* y *haz de planos* (pasando por una recta). Es por eso que todo teorema que es válido para puntos y rectas (que los unen), es también válido para los planos y las rectas (que configuran su intersección) y viceversa.

3) Varios números, cualesquiera que sean, no pueden tener el mismo sucesor.
4) Cero no es el sucesor de ningún número.
5) Si una propiedad pertenece a cero y si cuando pertenece a un número cualquiera pertenece también a su sucesor, entonces pertenece a todos los números (principio de inducción)

Se ve entonces cómo, con la ayuda de las dos primeras proposiciones es posible definir, primero, el número *uno,* después el *dos* y así sucesivamente. Con estas bases es posible definir o demostrar todas las nociones y proposiciones elementales de la aritmética.

Sólo que la interpretación habitual de los términos primeros no es la única que puede satisfacer este juego de axiomas y así no puede determinar unívocamente un sistema concreto de proposiciones. Russell hace la siguiente observación: si le conservamos a *sucesor* su significado común, pero entendemos a *cero* como un número cualquiera, digamos 100, y a *número* como cada uno de los que se continúan a partir de 100, los cinco axiomas quedan verificados y, naturalmente, todos los teoremas que de ellos pueden deducirse. Del mismo modo, si conservándole su sentido ordinario a *cero* se designara *número* sólo a los números pares, y por *sucesor* el segundo sucesor; o incluso si *cero* representara el número 1 y el *sucesor* representara la mitad, el *número* designaría cada uno de los términos de la serie 1, 1/2, 1/4, etc. Todas estas interpretaciones y las parecidas que será fácil imaginar, presuponen una estructura formal común que esta axiomática pone en claro. Lo que ella caracteriza no es propia y limitadamente la aritmética, sino en forma general una cierta estructura, la de las *progresiones.* La serie de los números naturales es sólo una ilustración entre otras. Además, éstas no permanecen encerradas, como lo podrían sugerir los ejemplos anteriores, en los subdominios interiores de la aritmética. Es posible instituir una progresión entre entidades que sean distintas de los números, puntos o instantes.

A guisa de segundo ejemplo haremos el bosquejo que nos donó Hilbert de la geometría euclidiana.[18] Su interés lo concentró en las proposiciones sin preocuparse gran cosa por reducir al mínimo el número de los términos primeros que, por

[18] *Gründlagen der Geometrie,* 1899. En las ediciones siguientes el autor hizo algunas modificaciones pequeñas. Nosotros consultamos la 3ª edición, 1909. Los que no encuentren accesible la obra de Hilbert podrán encontrar sus 21 axiomas en el excelente libro de Godeaux, *Les géométries* (colección de A. Colin). Recordemos de una vez por todas que el término axioma no implica ya la idea de evidencia y de regla y retiene únicamente la de principio establecido hipotéticamente, esto es, de postulado. Tal sustitución se ha hecho inevitable también con la palabra axiomática.

otra parte, incorporó a los axiomas, sin enunciarlos en forma sistemática y separada.[19] Pero dos trazos suyos merecen atención.

En primer lugar no quedó contento con sólo despejar los axiomas, algunos de los cuales permanecieron, hasta entonces, implícitos, y enumerarlos, sino que también los repartió, de acuerdo con las nociones fundamentales que emplean, en cinco grupos. Esforzándose con cada uno de estos grupos o sus combinaciones por precisar y delimitar el dominio de los teoremas que determinan. Los del primer grupo fincan un enlace entre las ideas de punto, de recta y de plano. Son los axiomas característicos de la geometría proyectiva (ocho axiomas, por ejemplo, dos puntos determinan una recta; sobre una recta hay siempre por lo menos dos puntos y sobre un plano al menos tres puntos que no están en línea recta). Los del segundo grupo, los axiomas del *orden,* fijan el sentido de la palabra *entre* y son los axiomas topológicos (cuatro axiomas, por ejemplo, si *A, B, C,* son puntos de una recta y si *B* se encuentra entre *A* y C, se encuentra también entre *C* y *A).* El tercer grupo incluye los seis axiomas de la *congruencia* o igualdad geométrica. (Por ejemplo, si *A* y *B* son dos puntos de una recta *a,* y *A'* un punto de una recta cualquiera *a',* existe sobre *a*' y de un lado cualquiera de *A'* uno y un solo punto *B'* de modo que el segmento *A'B'* sea congruente con el segmento *AB).* El cuarto grupo conlleva sólo un axioma, el de las *paralelas.* Finalmente, un último grupo se refiere a la *continuidad* y lo integran dos axiomas, entre ellos el llamado de Arquímedes cuyo enunciado es que, añadiendo sucesivamente un segmento a sí mismo sobre una recta y a partir del punto *A,* siempre se podrá superar un punto cualquiera *B* de esta recta.

Por otra parte, Hilbert dio principio a un género de investigaciones, cuya importancia iba a revelarse como capital en toda elaboración axiomática, cuando se preguntó en forma sistemática acerca de la no-contradicción de su sistema de axiomas y la independencia mutua de sus elementos. Con el fin de establecer la no-contradicción elabora una interpretación matemática del sistema, de modo que toda contradicción que apareciera en las consecuencias de sus axiomas debería repercutir sobre ella. Se supone admitida la coherencia de la aritmética, por lo que garantiza la de su sistema de axiomas. Además, la independencia de un axioma queda establecida por la posibilidad de construir un sistema coherente que lo haga a un lado. Las geometrías no euclidianas iniciales eran ya testigos de la independencia del axioma de las paralelas. En forma semejante, al construir una geometría no arquimediana, Hilbert demuestra la independencia de los axiomas de la continuidad.

[19] Desde 1882, Pasch logró definir todos los términos partiendo de cuatro términos primitivos *(punto, segmento, plano, puede superponerse a).* Iniciando aquí, Peano (1889-1894) y Padoa (1900) los reducirán a dos (que son respectivamente: *punto y movimiento, punto y distancia).* En Hilbert la reducción se encuentra mucho menos desarrollada. Poco después Veblen, en 1904, nos ofrecerá de la misma geometría una axiomática reducida.

12. Los modelos. El isomorfismo

A una teoría en el estadio preaxiomático se le puede dar el nombre de *concreta, material* o *intuitiva.*[20] Esto significa que aún mantiene contacto con los conocimientos que organiza y que su contenido conserva su sentido y su verdad empíricos. Es tal el caso de la geometría ordinaria, como se enseña comúnmente en las escuelas. Es siempre posible, como se ha visto, reconstruir una determinada teoría deductiva concreta sobre distintas bases. De este modo, los diversos autores de tratados de geometría elemental, al mismo tiempo que ofrecen desde hace siglos el mismo cuerpo de doctrina, han ido más o menos modificando el ordenamiento euclidiano. Son secundarias hasta donde el contenido de la teoría es considerado esencial, pero estas diferencias formales toman una importancia creciente a medida que se descuida su contenido. Por eso es posible decir que su interés sólo se manifiesta en pleno con las axiomáticas, teorías abstractas y formales. En tal sentido se opondrá, a una teoría concreta determinada, la pluralidad de las axiomáticas que le corresponden. Por ejemplo, la axiomática de Hilbert es sólo una entre todas a las que se presta la geometría euclidiana.

Consideremos por ahora sólo una de las axiomáticas múltiples de una teoría concreta. Como el sentido de sus términos, y en consecuencia, de todas sus proposiciones no está fijado sino equívocamente por los postulados, se podrá en todo caso, si se descubren varios sistemas de valores que satisfagan por igual el conjunto de las relaciones que enuncian los postulados, dar interpretaciones concretas distintas, o bien, escoger entre varias realizaciones. Las realizaciones concretas de una axiomática se denominan sus *modelos.*[21] Se da como entendida de por sí que la teoría concreta original que proporcionó los puntos de referencia del esquema lógico trazado por la axiomática será uno de los modelos, pero no el único. Una axiomática se presta, como ya se comprobó en ocasión de la axiomática peaniana, a realizaciones diferentes y éstas pueden ser tomadas de dominios de pensamiento muy alejados del dominio inicial. Se da entonces una pluralidad de interpretaciones y modelos concretos que oponemos a una sola y misma axiomática.

---

[20] Por supuesto que estos términos tienen aquí sólo sentido relativo, opuesto al carácter más abstracto, más formal y más lógico de la correspondiente teoría axiomática.

[21] *Modelo* no debe sugerir la idea de que existe una anterioridad arquetípica. La palabra se explica por la asimilación de estas interpretaciones diversas a la teoría concreta primitiva, que muy propiamente puede ser llamada *modelo* de la axiomática construida acorde con ella. Sin duda el recuerdo de los "modelos mecánicos" de los físicos británicos intervino en la introducción concreta de esta noción.

En el caso en que los modelos no se distinguen de esta forma entre ellos sino por la diversidad de las interpretaciones concretas que pueda darse a sus términos y coinciden de manera precisa si se hace abstracción de éstas, de modo que se instalen en el plano de la axiomática formal, se dice entonces que son *isomorfos,* pues tienen la misma estructura lógica.

El método axiomático tiene precisamente el interés de revelar los isomorfismos entre teorías concretas que son aparentemente heterogéneas, para reestablecerlas en la unidad de un sistema abstracto. De este modo, cualquiera de estas teorías podrá servir de modelo a las otras, si ampliamos un poco el uso de esta palabra, así como a la teoría abstracta correspondiente.[22]

Existen entonces tres niveles que deben distinguirse y sobre los que es posible diversificar una teoría deductiva. Regresemos, como siempre, al ejemplo de la geometría euclidiana. En primer lugar, si se modifica en forma diversa por lo menos uno de sus postulados, se obtendrán otras teorías (geometría lobatchevskiana, no-arquimediana, etc.), que serán sus *vecinas* o *parientes (emparentadas).* Es en este sentido que se habla de la pluralidad de las geometrías. Escojamos cualquiera de estas geometrías. Como hay formas muy diversas de efectuar su reconstrucción lógica, se diversificará entonces en varias axiomáticas que serán *equivalentes* entre ellas. Si finalmente escogemos una de estas axiomáticas, por lo general se le podrá encontrar distintas interpretaciones. Surge de aquí una diversificación nueva de acuerdo con modelos que serán *isomorfos.* Se superpone así a la diversidad de geometrías la de axiomáticas de una misma geometría y, a ésta, la de modelos de una misma axiomática. Y la palabra teoría se ajusta por igual a la presentación axiomática o a sus interpretaciones concretas. Habrá entonces que evitar equivocarse y confundir entre el caso de las teorías emparentadas, las equivalentes y las isomorfas.

13. Consistencia e integridad. Decidibilidad

La elección de los postulados que constituyen la base de una axiomática, por arbitrarios que sean en ocasiones, no se deja al azar, sino que queda sujeta a diferentes exigencias internas que son, más o menos, imperiosas.

---

[22] Cuando todos sus modelos son isomorfos entre sí, el sistema axiomático recibe el nombre de *monomorfo.* Hay también sistemas *polimorfos.* En particular, se nota de inmediato que los diversos modelos de un sistema no saturado (véase el inciso 15) no son isomorfos en su totalidad, pues la ausencia de saturación significa precisamente la posibilidad de una o varias bifurcaciones. Más adelante se advertirá que algunos sistemas saturados, paradójicamente, pueden igualmente conllevar modelos que no son isomorfos (véase el inciso 26). En el caso de otros términos, la saturación es condición necesaria, aunque no suficiente, de monomorfismo.

La coherencia es, indudablemente, la más apremiante. Si los distintos postulados de un sistema no fueran compatibles entre ellos, el sistema podría convertirse en contradictorio. De seguro que es permitido, por necesidades teóricas, eliminar un tanto al azar esta obligación o incluso intentar construir expresamente un sistema contradictorio, del mismo modo que en ocasiones uno se propone razonar por el absurdo. Mas tal caso resulta excepcional y, de ordinario, se impone como condición absoluta a una axiomática ser no-contradictoria o, como también se dice, *consistente*.[23] En efecto, una de las propiedades de un sistema contradictorio es que permita deducir no importa qué. En él es posible demostrar una proposición cualquiera del sistema y también su negación. Esta indeterminación priva al sistema de todo interés.

¿Cómo puede saberse que un sistema de postulados es verdaderamente consistente? La intuición es insuficiente para asegurarnos de esto. Por otra parte, tener desarrollada una larga cadena de consecuencias sin encontrar en ella jamás una contradicción puede, sin duda, aportarnos una presunción; e incluso, en el caso de que la axiomática cubra por completo una teoría concreta, que ha sido desarrollada en todos sus sentidos desde hace siglos, una certeza moral. Por ejemplo, nadie pone en duda la consistencia de la aritmética elemental o de la geometría euclidiana. No obstante, y especialmente en el caso en que falte una prueba tal, semejante presunción no nos aporta una certeza absoluta. Nada nos garantiza que no pueda presentarse una sorpresa, ni nos asegura que, al llegar a un cierto punto, no tropezaremos con un absurdo. Eso fue lo que ocurrió, por ejemplo, con las antinomias de la teoría de los conjuntos (véase el inciso 27). Pese a que tuvo su origen en la creciente exigencia de rigor lógico, la práctica de la axiomática aumenta a su vez aquella exigencia e induce a sustituir esta especie de prueba empírica por una demostración verdadera, la cual, es cierto, sólo podrá ser practicable al nivel de las axiomáticas simbolizadas y formalizadas (capítulo III). Se verá igualmente que sólo tiene éxito dentro de límites muy estrechos.

A falta de una demostración propiamente dicha, nos quedan dos procedimientos para establecer la no-contradicción de una teoría. Primero, la *reducción* a una teoría anterior. Se postula la no-contradicción de un sistema bien establecido en la práctica, como la aritmética clásica o la geometría euclidiana; a continuación se elabora, a partir del sistema que se estudia, una interpretación tal que venga a aplicarse sobre el primero o parte de éste. La no-contradicción postulada del primero se transmite de esta forma al segundo. Una prueba hecha así, evidentemente sólo puede ser condicional, pero si la teoría-testigo fue propiamente escogida, en la práctica es suficiente. Una vez que Poincaré ofreció una interpretación euclidiana

[23] Un análisis más refinado hace la distinción *entre* no-contradicción y consistencia, también diferencia nociones diversas de la consistencia, etcétera.

de la geometría lobatchevskiana terminaron las dudas acerca de la consistencia de esta última. La propia geometría euclidiana recibió de Hilbert su interpretación aritmética, que se añade a la ya considerable probabilidad de su consistencia. Con mucha frecuencia se escoge como testigo a la aritmética clásica.

Un segundo procedimiento consiste en dar a la teoría de la que se trata una *realización* en el mundo de las cosas. En vez de hacer volver la teoría a una teoría anterior cuya consistencia esté más asegurada, se desciende a lo contrario, hacia lo concreto y se construye un modelo físico. Dado que todo lo que es real es *a fortiori* posible, la existencia de ese modelo garantiza la consistencia de la axiomática que le corresponde. ¿Y, no es, en el fondo, el éxito de las interpretaciones empíricas de la geometría clásica aquello que nos hace aceptar, antes que cualquier otra prueba, la coherencia de esa geometría y, en consecuencia, de la axiomática que obtiene de ella su esqueleto lógico?

De dos proposiciones contradictorias, p y no-p, el principio de contradicción nos enseña que no pueden ser simultáneamente verdaderas, al menos una de ellas es falsa. A este principio se asocia, desde hace mucho tiempo, el principio del tercero excluido, cuyo enunciado es que tales proposiciones no pueden ser falsas simultáneamente, sino que por lo menos una de ellas es verdadera. La conjunción de ambos principios nos da lo que puede ser llamado el principio de alternativa: de dos proposiciones semejantes, una es verdadera y la otra falsa. A la consistencia de un sistema fundada en el principio de contradicción responde de este modo su integridad, asentada sobre el principio del tercero excluido. Un sistema de postulados es *completo* cuando entre dos proposiciones contradictorias formuladas correctamente dentro de los términos del sistema, una de ellas siempre puede ser demostrada. Si además el sistema es consistente, puede verse entonces que de todo par que se forma en el interior del sistema por una proposición cualquiera y su negación, siempre es posible demostrar una y sólo una. En otras palabras, en presencia de una proposición cualquiera del sistema se puede siempre demostrarla o negarla, decidir en consecuencia su verdad o su falsedad en relación con el sistema de postulados. Entonces puede decirse de tal sistema que es *categórico.*

Por debajo de esta forma fuerte de la categoricidad, que sólo un número muy reducido de sistemas puede alcanzar, existe una forma más débil de categoricidad, aquella en la que es posible en todo caso, para una cualquiera de las expresiones del sistema, si no demostrarla (o negarla), decidir al menos si es o no demostrable (o refutable). Este sistema recibe entonces el nombre de *decidible.*[24] Esta cualidad pertenece sólo a un número muy limitado de sistemas relativamente simples.

[24] Las diferenciaciones hechas posteriormente han hecho aparecer que determinados sistemas puedan ser al mismo tiempo completos y, sin embargo, indecidibles.

La no-categoricidad y, con mayor razón, la no-decidibilidad, constituyen indudablemente imperfecciones, mas no faltas a la lógica, como en el caso de la no-consistencia. Por eso la exigencia de integridad, ordinariamente, se ve como menos apremiante que la falta de consistencia.

14. Independencia. Economía.

Con frecuencia también se exige que los diversos postulados de un mismo sistema sean *independientes* unos de otros. Esto es, que la modificación que se haga a uno de ellos no convierta el sistema en contradictorio. Para estar seguro de la independencia de un axioma se le prueba modificándolo sin tocar a los otros y extrayendo las consecuencias del nuevo sistema. Si permanece consistente, la independencia del postulado queda establecida y, si ocurre al contrario, que se produzca una contradicción, y si además, como es lo más común, la modificación aportada al postulado fue sustituirlo por su negación, entonces el resultado obtenido no es puramente negativo porque la cadena de proposiciones que se ha establecido da de este modo, del postulado primitivo, una demostración por el absurdo. Puede verse el lazo de unión entre una prueba de independencia y la demostración por el absurdo: el fracaso de una se convierte en el éxito de la otra. De este modo, ensayando vanamente demostrar por el absurdo el postulado de las paralelas fue que se llegó, sin querer, a elaborar las primeras geometrías no-euclidianas y demostrar así, mediante la consistencia de estas últimas, la independencia del postulado. Del mismo modo, pero deliberadamente, procedió Hilbert para establecer la independencia del postulado de Arquímedes.

La independencia de los postulados de un mismo sistema no es lógicamente indispensable para que tengan validez. Sólo si esta condición no se satisface se produce una superabundancia de proposiciones primeras y se considera preferible, por economía, reducir su número al mínimo. Afirmar que dos postulados no son independientes, esto es, que uno de ellos puede ser demostrado directamente o por el absurdo a partir del otro, será, en este caso conforme al espíritu del método deductivo, producir tal demostración y hacer pasar la proposición entre los teoremas.

Estas consideraciones de economía que tienen carácter estético desempeñan, no obstante, un papel considerable en la construcción de las axiomáticas. El ideal de éstas, como el de toda teoría deductiva en general, ¿no es reducir lo más posible el número de los términos primeros y de las proposiciones primeras? Se han realizado numerosos esfuerzos en este sentido, pero la simplicidad lograda en un punto debe pagarse, frecuentemente, con una complicación acrecentada sobre otros, y la elección la dictarán entonces razones estéticas o didácticas. Resulta difícil disminuir simultáneamente el número de los términos primeros, el de los axiomas y su longitud. La pobreza de la lengua básica tiene, por lo general, el efecto de hacer más largo el discurso. Además, la mayor simplicidad intrínseca de un sistema podría hacer más incómoda su utilización concreta si, dentro del dominio considerado, no corresponde ya, de manera directa a los términos del sistema, ninguna entidad. A menos que, a la inversa, el uso de la axiomática aclimate allí, poco a poco, la noción. Independientemente de toda interpretación extrínseca, razones de facilidad de exposición pueden invitar a que se hagan determinados sacrificios al ideal de la simplicidad máxima.

15. Los sistemas debilitados o saturados

En lugar de modificar, dentro de un sistema de postulados compatibles e independientes, puede intentarse eliminar uno de ellos sin tocar a los demás. Entonces el sistema se *debilita,* dado que se le han eliminado ciertas determinaciones. Es por eso que allí se le ensancha abriendo la puerta a determinadas posibilidades que el postulado recién extraído tenía, por efecto, excluir. Dicho de otro modo, el sistema se encuentra empobrecido en comprehensión y enriquecido en extensión. Por ejemplo, si al mantener intactos los demás postulados euclidianos se niega la unicidad de la paralela, se logra la geometría lobachetvskiana que, aunque diferente de la de Euclides, tiene, sin embargo, el mismo grado de particularidad. Pero si, al contrario, se deja totalmente indeterminado el número de las paralelas posibles, esto es, si en vez de reemplazar el postulado de las paralelas uno se contenta con suprimirlo, cavando en cierta forma un vacío en el sistema, se obtienen entonces los principios de una geometría más general en la que las de Euclides y Lobachetvski aparecerían como especificaciones.

Puede intentarse hacer la operación a la inversa, probando reforzar y limitar un sistema determinado añadiéndole uno o varios postulados independientes de los primeros. Por lo general se tropieza con un obstáculo, pues llega un momento en que la adición de todo postulado independiente, el que sea, convierte al sistema en contradictorio. Se dice entonces que el sistema está *saturado.* Es éste el caso de la geometría euclidiana, con la condición de que no se incluyan en ella como postulados adicionales aquellos que, sin estar expresamente formulados, no estaban menos admitidos implícitamente en las demostraciones.

III. LAS AXIOMÁTICAS SIMBOLIZADAS

16. Simbolización

El fin que se persigue cuando se pone en forma axiomática una teoría deductiva es apartarla de las significaciones concretas e intuitivas sobre las que, en primer lugar, fue elaborada, y esto con el fin de hacer aparecer en forma clara el esquema lógico abstracto. De acuerdo con esta consideración, las primeras axiomáticas padecen de un buen número de imperfecciones, como puede verse en la de Hilbert. Se demanda olvidar el sentido concreto de los términos que son propios de la teoría; considerar los puntos, las rectas y los planos sólo como "cosas" que satisfacen a los axiomas. Pero como estos términos se conservan, se favorece, en lugar de contrariarla, nuestra inclinación espontánea a tener una cierta interpretación concreta determinada. Incluso se la hace casi imposible de derrotar si uno no tiene miedo de ilustrar el texto con figuras geométricas. Quedamos entonces expuestos a cometer una de las faltas que queríamos evitar: sostener, en torno a significaciones determinadas en forma expresa por los postulados, una zona más o menos fluida de significaciones previas implícitas a las que arriesgamos referirnos, sin darnos cuenta, en la sucesión de las demostraciones. En todo caso, uno es detenido en el camino en la tentativa de despojar de todo contenido intuitivo la armadura lógica de la teoría.

Pronto se hace sentir de este modo la necesidad de sustituir las palabras que designaban las nociones primeras de la teoría, cargadas todavía con el peso de su significación intuitiva, por símbolos que están desprovistos de sentido previo y en consecuencia susceptibles de recibir precisa y exclusivamente el que le confieren los axiomas. En lugar de escribir que un punto se encuentra situado sobre una recta, se designará la relación de incidencia por la letra F, los puntos con las primeras letras mayúsculas y las rectas por las minúsculas y se escribirá sólo: F (A,a). Puede verse ya en este ejemplo que la simbolización no se detiene sólo en las nociones propias de la teoría —en nuestro ejemplo, sólo en las nociones geométricas— sino que emplea también el simbolismo de la lógica de las relaciones. Sin duda, en lo teórico tal cosa no es indispensable pues las teorías anteriores a otra teoría, en este caso la aritmética y la lógica, intervienen sólo a título operatorio, esto es, con su verdad material y su sentido habitual. No obstante, resultaría paradójico que, en el momento mismo en que se está creando un simbolismo destinado a una teoría que aún no lo tiene, no se empleara al mismo tiempo el de las teorías que ya lo poseen como, desde mucho tiempo atrás, la aritmética y, tiempo después, la lógica. En efecto, se sabe que después de la mitad del siglo XIX, la lógica se ha renovado y ampliado bajo el impulso de los matemáticos que la han unido a su ciencia empleando la ruta del simbolismo. En tanto que Boole y sus discípulos se imponían como fin construir un cálculo lógico que siguiera el modelo del cálculo algebraico, la escuela italiana, encabezada por Peano, se entregaba a elaborar un algoritmo lógico especialmente adaptado a las necesidades de la expresión matemática. Naturalmente, cuando esta segunda corriente se encuentra con lo que está dirigido a la axiomatización de las matemáticas, todo resulta en una axiomática presentada totalmente bajo la forma simbólica, y es de este modo que desde finales del siglo XIX Peano expuso su aritmética.

Una segunda razón, imperiosa en otra forma, precipitaría la total simbolización: la exigencia de la formalización. Si bien simbolización y formalización constituyen dos pasos diferentes y separables en la teoría, en realidad se encuentran muy estrechamente ligadas, puesto que la segunda es facilitada considerablemente por la primera, por lo que recurre a ella en forma casi irresistible.

17. Formalización

En el momento en que uno cree haber satisfecho las demandas finales de la lógica es cuando una demanda nueva, y más sutil, aparece exigiendo un esfuerzo suplementario. De la geometría empírica a la racional, de la presentación euclidiana a la axiomática, de las axiomáticas comunes a las simbolizadas, en cada caso se considera que se ha expulsado finalmente la intuición a favor de la lógica. ¿Hemos llegado ahora al final y esta última etapa es en realidad la última? ¿Hemos logrado eliminar todo factor intuitivo y subjetivo en la apreciación de la validez de una teoría deductiva?

La teoría nos ofrece proposiciones primeras que enuncian mediante el lenguaje simbólico relaciones lógicas entre términos primeros. Puesto que las propone sólo a título de hipótesis las aceptamos como tales, bajo reserva de su compatibilidad. Pero, a continuación, no admitiremos un solo término nuevo si no se le define con la ayuda de los términos primeros, ni aceptaremos una proposición nueva si no es demostrada con la ayuda de las proposiciones primeras. Por lo tanto, ninguna incertidumbre, ninguna impugnación que pueda hacerse acerca de adoptar un término o una proposición nuevos —lo cual se hará con una condición: que las reglas de la definición y la demostración puedan ser admitidas sin que haya la menor ambigüedad. Que la deontología del trabajo deductivo, esto es, la lógica, sea a la vez perfectamente precisa y perfectamente universal; que regule todos los detalles y se imponga a todos los espíritus. Si no es así, si en este dominio pueden aparecer desacuerdos, si sucede que se discurre sobre el valor lógico de tal procedimiento de demostración o de definición, entonces la axiomática, que para unos es un edificio lógico irreprochable, podrá ser juzgada por otros como defectuosamente lógica.

Lo anterior es lo que, sin duda, ocurre en forma muy aguda en el preciso momento en que se comienza a axiomatizar. "La crisis de los fundamentos" (véase el inciso 27) que se presentó con motivo de la teoría cantoriana de los conjuntos dividió profundamente a los matemáticos. Y no fue por una de esas disputas acerca de un tema en particular, como las que son conocidas a toda ciencia en desarrollo y que posteriormente se calman al alcanzarse un acuerdo que un sabio competente es incapaz de rehusar sin experimentar una mala conciencia, sino por una divergencia al parecer fundamental sobre cuestiones de principio y que al parecer es testigo de diferencias irreductibles en la estructura de los espíritus. Tal definición, que para uno es perfectamente clara, es considerada por otros como despojada totalmente de sentido, aquella demostración, constringente para éste, carece de fuerza para aquél; el principio de lógica que de acuerdo con algunos se impone de manera absoluta a todo pensamiento, según otros tiene valor sólo sobre un dominio limitado.

¿Cómo, en un caso así, escoger un lado para, por lo menos, limitar el desacuerdo y encontrar un campo de acuerdo? Existe sólo un medio: elaborar ahora para las reglas de la lógica *de acuerdo con las cuales se razona,* lo que se hizo anteriormente con los postulados *acerca de los cuales se razona:* enunciarlos en forma expresa y en su totalidad y después adoptar la misma actitud apartada que se tomó ante los postulados, exponerlos en forma hipotética y no afirmarlos categóricamente. De la misma manera en que se admiten, lado a lado y al nivel de las axiomáticas abstractas, sistemas distintos de postulados que son incompatibles (euclidiano, lobatchevskiano, etc.) sin preguntarse cuál es verdadero y dándolos a todos como igualmente válidos, del mismo modo sería posible acoger, al nivel de las axiomáticas formalizadas, sistemas diferentes de reglas lógicas y, en consecuencia, formas diversas de desarrollar una axiomática. En palabras de Carnap: en la lógica no hay moral; no se trata de decretar prescripciones o prohibiciones sino de alcanzar convenciones. Cada uno es libre de construir la lógica a su manera con la condición de que la enuncie claramente y que luego se apegue a ella rigurosamente (el principio de tolerancia de la sintaxis). La corrección lógica en el desarrollo de una teoría axiomatizada deja, en ese caso, de tener un sentido absoluto, pero como llega a ser relativa a este o a aquel conjunto de principios regulativos puede prestarse a una apreciación objetiva. Colocados frente a una axiomática podemos encontrarnos en la situación de dos amigos que no se pusieron de acuerdo al establecer las reglas de un juego. Como no tuvieron la precaución de enunciarlas no podrán jugar juntos la partida que hayan escogido; pero si en cambio sí lo hacen y acuerdan, por ejemplo, alternar dos reglamentos, podrán entonces jugar sin tener que acusarse de hacer trampa. El reino de la validez se establece, en cierta forma, a un nivel más elevado. Así como cuando se pasaba de una teoría concreta a la teoría axiomatizada la verdad de una proposición del sistema pasaba a ser hipotética suspendida a la posición libre de tal sistema de postulados; del mismo modo ahora la validez formal de la axiomática retrocede un grado y pasa, a su vez, a ser hipotética, convirtiéndose en función de la manera como se eligieron las normas lógicas.

La presentación lógica de las teorías deductivas tomó, hacia 1920, un nuevo giro, comprometiéndose con el camino de la formalización. Con el fin de sustraer la validez del sistema de toda apreciación subjetiva se impuso a partir de entonces la necesidad de enunciar en forma precisa y detallada, que no dé lugar a la casuística en las reglas de definición y demostración que rigen su construcción. Los mismos que no creen en la omnipotencia de la lógica y defienden los derechos de la intuición, tuvieron que ceder a este movimiento con el fin de poder justificarse ante los ojos de sus rivales, y se ha llegado a ver, lo cual no deja de ser paradójico, que se enuncien "las reglas formales de la lógica intuicionista" y que se constituya un "formalismo intuicionista".

18. Del razonamiento al cálculo

Se piensa que resultaría prácticamente imposible satisfacer exigencias tan estrictas si se continuara expresándose en el lenguaje habitual, con su falta de precisión y sus numerosas irregularidades. Es de hecho, por esto, que la formalización supone la simbolización. Una axiomática formalizada aparece de este modo como un conjunto de signos, unos que son propios a la teoría y otros que son anteriores, provistos del enunciado de las reglas que se aplicarán al manejo de tales signos. Con frecuencia estas reglas se dividen en dos grupos: las reglas de estructura, destinadas a la formación de las expresiones (en ellas pueden colocarse las reglas para hacer las definiciones) y las reglas de deducción (destinadas a las demostraciones). Las primeras siempre deben permitir reconocer sin disputa alguna si una expresión (ya sea o no proposicional) se encuentra bien formada y, de este modo, pertenece al sistema; las segundas, si una deducción está bien llevada y si, en consecuencia, su conclusión constituye un teorema del sistema. Estas reglas, por supuesto, dejan por completo a un lado las interpretaciones eventuales de términos o de fórmulas, entre ellos los de la lógica. Sólo toman en cuenta la estructura formal de las expresiones, la sucesión de dibujos pequeños que se leen de izquierda a derecha y línea tras línea sobre la hoja. Más propiamente constituyen prescripciones para hacer un cálculo. Pueden compararse a las reglas del juego de ajedrez que nos muestran cómo deben colocarse al principio las piezas y luego cuáles son los movimientos permitidos de cada una de ellas. Entonces, una demostración no hará un llamado a nuestro sentimiento espontáneo de la evidencia de determinados encadenamientos lógicos, sino que se ocupará de transformar, en grados sucesivos y sin saltar ninguna etapa, una o varias fórmulas escritas con anterioridad como axiomas o teoremas, haciendo mención, en el caso de cada una de estas transformaciones elementales, del número de la regla que la autoriza hasta que se llegue finalmente, línea tras línea, a la fórmula que se busca. Debido a un cambio brusco de actitud, comparable al que afecta la conciencia ante una figura ambigua, el pensamiento, en lugar de atravesar los símbolos para apuntar por su intermediario a las cosas simbolizadas, ahora se detiene en los símbolos mismos, dejando para después su posible interpretación y retirándoles por el momento su función de símbolos con el fin de tomarlos como objetos últimos.

Las exigencias de rigor habían hecho que se descartara como sospechosa a la intuición sensible, en especial la representación de figuras en el espacio, para confiar sólo en la evidencia de los encadenamientos lógicos. Actualmente, las incertidumbres de la intuición intelectual conducen a repudiarla y a sustituir el razonamiento pensado, o incluso hablado, por un cálculo hecho sobre signos expuestos a la mirada sobre una hoja de papel. Sólo regresando de esta forma a la intuición visual no recaemos en el nivel primero. En primer lugar se ha logrado un progreso en el sentido de lo abstracto y de lo general al recurrir a la posibilidad de hacer una interpretación posterior de los símbolos, o mejor dicho, de una multitud de interpretaciones diversas. Pero también se ha alcanzado un progreso considerable respecto a la seguridad y la objetividad. Si los signos constituyen un número restringido, si su figura no se presta a la confusión y si, por último, se instituye en forma expresa una legislación coherente y sin escapatorias para su manejo, entonces no es ya posible ninguna impugnación seria, como tampoco ocurriría en un juego bien organizado: tal agrupamiento de signos está prohibido o no lo está, aquella transformación de una fórmula está prohibida o no lo está. Como escribe Cavaillès: "Un razonamiento escrito no puede engañar, pues en su diseño aparecerían las figuras excluidas."[25] En este caso, "el error salta a los ojos" como un error de cálculo en una operación aritmética, un movimiento equivocado en una partida de ajedrez, un barbarismo o un solecismo en un idioma en el cual el lenguaje esté bien reglamentado. De este modo el cálculo formal, como ya lo anhelaba Leibniz, sustituye con ventaja al razonamiento.

19. La metamatemática

[25] J. Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme,* p. 94.

Con este cambio en el punto de vista que hace pasar, por lo menos de momento, los caracteres del rango de medio al de fin, surgen nuevas posibilidades especulativas. El pensamiento se encuentra ahora en presencia de otro sistema de objetos regulados para combinarse y disociarse de acuerdo con leyes bien determinadas y que experimentan así transformaciones que no son, sin recordar al matemático, las que éste tiene por costumbre estudiar sobre figuras o, mejor aún, en los problemas de combinatoria. Los signos, de acuerdo con las leyes que norman su empleo, "definen una suerte de espacio abstracto que cuenta con tantas dimensiones como grados existen de libertad en la operación concreta e imprevisible de la combinación".[26] Surge así la idea de una ciencia nueva cuyo objeto no serían ya los seres matemáticos de los que hablaban las fórmulas, sino las fórmulas mismas, haciendo abstracción de su sentido. Las fórmulas elaboradas en razón de los seres matemáticos se separan por completo de éstos para figurar también como seres de naturaleza original y dignas de un estudio apropiado.

La *metamatemática* será, en relación con la expresión matemática, lo que las matemáticas comunes son en relación con sus objetos. Todavía es Hilbert el que, a partir de 1917, dio impulso a este nuevo orden de investigaciones que, bajo su dirección, comenzaron a desarrollarse en Gotinga, de modo que su nombre se encuentra asociado íntimamente a la segunda y la primera fase de la axiomática.

No se trata en forma alguna de un juego gratuito. La metamatemática se encontraba ya, en cierta forma, en el punto de encuentro de varias líneas de investigación. Primero en la confluencia de dos corrientes que ya conocemos, la que tuvo su origen en la reflexión acerca del aparato lógico de la geometría y que al emplearse para perfeccionarla desembocó en la axiomática, y la segunda, la que tendía a reformar la lógica inspirándose en los métodos del álgebra y había logrado constituirla como un cálculo. Por influencia recíproca la axiomática se transformaba, entonces, en un cálculo, en tanto que por su lado la lógica se axiomatizaba. Además, el giro que habían tomado las polémicas acerca del problema principal del fundamento de las matemáticas (véase el inciso 27) sugería recurrir al formalismo, aunque abordando los problemas bajo un sesgo que resultara aceptable por los enemigos de los métodos puramente formales. Ya Zermelo había tratado de resolver las dificultades poniendo en marcha lo que podría llamarse, en retrospectiva, la axiomática ingenua. Su resultado más visible fue reafirmar en su actitud a los matemáticos empiristas o intuicionistas cuya doctrina, con Brouwer y su escuela, se desarrollaba y afianzaba. Como se sabe, tomar en cuenta los signos trazados sobre una hoja constituye ya, en un sentido, el regreso a la evidencia intuitiva. Si fuera posible estudiar de acuerdo con métodos científicos estrictos las demostraciones impugnadas, haciendo abstracción de las entidades y de las operaciones matemáticas

[26] *Ibidem*, p. 93.

a las que remiten —algunas de las cuales están desprovistas de sentido a ojos del intuicionista, en especial las que hacen intervenir la idea de un infinito actual—, por no tomar en cuenta sino únicamente sus combinaciones concretas sobre el plano del simbolismo, se transformaría por completo el aspecto del problema de forma que diera satisfacción a los partidos en pugna. Cambiando de objeto, transportando el estudio del dominio de los seres matemáticos al de los signos que los representaban, y considerando, en lugar de las nociones que algunos piensan son confusas o vacías, los símbolos que se ofrecen a la mirada, se coloca uno, sin renunciar a ninguna de las exigencias del rigor formal, en un terreno que el intuicionista considerará como suyo. Así, los problemas que concernían al infinito actual se transforman en problemas que conciernen a un número finito de operaciones de cálculo, ya efectuadas o que son efectuables, descansando en un número finito de signos que ofrece la intuición. En tanto que, por otra parte, el lógico más altivo no puede hacer otra cosa que acoger, si bien no con favor, el propósito de constituir una "teoría de la demostración" que sea, a sí misma, demostrativa.

Además, lejos de que la metamatemática inventara arbitrariamente problemas nuevos, es ella la que, por el contrario, es requerida por ciertos problemas que Hilbert descubrió desde que hizo sus primeras investigaciones, y junto con él todos los axiomáticos. Especialmente establecer la compatibilidad e independencia de los axiomas de un sistema. Estos problemas, y los que los acompañan (integridad, decidibilidad, saturación, etc.) propiamente no son problemas matemáticos puesto que no descansan sobre los objetos matemáticos mismos, sino sobre las proposiciones que hablan de estos objetos. En vista de que resultan esenciales a toda investigación axiomática, no podía dejar de hacerse sentir la necesidad de elevarlos al nivel de la ciencia y tratarlos en forma rigurosa y metódica. Éste es, precisamente, el fin de la metamatemática. Veamos, por ejemplo, el problema de la no-contradicción que, junto con el de la decidibilidad, ha ocupado el mayor lugar dentro de estas especulaciones. Recordemos la manera como se le resolvía en las primeras axiomáticas: realización en una teoría concreta cuya verdad atestiguara la experiencia —prueba que no deja de ser empírica y que no siempre es posible administrar; reducción a una teoría abstracta cuya no-contradicción era postulada—, lo que sólo lograba aplazar la dificultad. Pero el hecho de que la cuestión se trasponga y que, en vez de interrogarse acerca de la contradicción o la compatibilidad de las ideas, uno se pregunte acerca de la posibilidad o imposibilidad de elaborar, a partir de las fórmulas simbólicas que enuncian los axiomas de una teoría, y sujetándose a un sistema bien definido de reglas expresiones de esta o aquella forma —como por ejemplo, hacer aparecer un par de expresiones proposicionales que difieran sólo en que una reproduzca a la otra haciéndola preceder por un signo de negación. Si se puede demostrar esta posibilidad o esta imposibilidad, se habrá demostrado, por eso mismo, la contradicción y la no-contradicción de la teoría.

20. El límite de las demostraciones de no-contradicción

Sin embargo, se hace necesaria una condición: cualesquiera que sean la complejidad e inseguridad de la teoría matemática estudiada y de las fórmulas simbólicas en donde se expresa, la demostración metamatemática que descansa sobre esta teoría deberá, bajo pena de caer en un círculo vicioso o de petición de principio, no hacer sino encadenamientos deductivos muy simples y no discutidos, de forma que logren en forma irresistible la adhesión de un espíritu atento. Del mismo modo que la consideración de signos remite a la representación visual, así la demostración sobre estos signos llama a la evidencia intelectual (aunque no sea sino para entender el sentido de las reglas, juzgar si son aplicadas correctamente, etc.). Mas ya sea racional o sensible, un retorno así a la intuición sólo es legítimo cuando no se va más allá del límite de las intuiciones elementales y que nadie lo sospeche.

Por más reducido que sea entonces el margen de la apreciación subjetiva para juzgar la validez de una teoría, el formalismo intransigente no se considerará aún del todo satisfecho. ¿No sería posible arreglárselas de modo que los procedimientos de la demostración metamatemática se encuentren integrados de alguna forma en la misma teoría de la cual demuestra la no-contradicción, de modo que la seguridad de la teoría así demostrada recaiga sobre estos procedimientos? Se esperó llegar allí empleando el ingenioso procedimiento de la "aritmetización de la sintaxis", obra de Gödel, que permite formular la sintaxis lógica de la aritmética al interior mismo de la aritmética, de forma que toda expresión de la lengua sintáctica pueda traducirse unívocamente en una expresión aritmética. Si, por otra parte, se ha llegado a establecer esta correspondencia de tal manera que toda proposición que traduzca así una proposición sintáctica en lenguaje aritmético pueda ser demostrable en la aritmética, entonces se habrá logrado expresar la sintaxis de la aritmética al interior de la aritmética.

¿Es posible ahora demostrar en esa lengua sintáctica la no-contradicción de la aritmética? Uno de los primeros resultados a que fue llevado Gödel por la aplicación de su procedimiento resultó precisamente el de probar la imposibilidad de tal demostración. Y, de hecho, dejó establecidos en dos teoremas de metamatemática (1931), primero que una aritmética no contradictoria no podía constituir un sistema completo, lo cual conlleva, necesariamente, enunciados indecidibles; segundo, que la afirmación de la no-contradicción del sistema figura precisamente entre estos enunciados indecidibles.

Este resultado, que en apariencia es negativo, obtenido por medio de métodos formales estrictos y luego corroborados por resultados análogos acerca de problemas análogos sobre problemas conexos, tiene gran alcance. Es más que un simple episodio de la historia de la metamatemática que reanudaba, bajo una forma nueva, el viejo ideal de una demostración absoluta al proponerse constituir un formalismo susceptible de terminar volviéndose a cerrar, de alguna forma, sobre sí mismo. En la actualidad se ha puesto fin a esta esperanza. Incluso dentro de la ciencia formal por excelencia, la matemática axiomatizada, se hace necesario resignarse a la separación, que ya se creía haber borrado, entre verdad y demostrabilidad. La primera noción desborda a la segunda porque, como una de las teorías matemáticas más elementales, comporta no sólo proposiciones en la actualidad indecididas sino proposiciones esencialmente indecidibles. Y como, por otro lado, el principio del tercero excluido y el enunciado contradictorio no-*p* son igualmente indemostrables (es decir, para las cuales puede establecerse que son igualmente indemostrables, el enunciado *p* y el enunciado contradictorio no-*p*) porque, de otra parte, el principio del tercero excluido cuya validez mantienen precisamente los formalistas contra sus adversarios intuicionistas, asegura que de dos proposiciones contradictorias una es necesariamente verdadera, aun en el caso de que no podamos decir cuál, se hace necesario concluir que existe, en el interior de una matemática axiomatizada, algo verdadero y no demostrable. Ya para una lengua formal tan restringida como la aritmética, su no-contradicción no podrá ser demostrada sino mediante una apelación a medios que le sean ajenos.

21. La axiomatización de la lógica

Problemas y dificultades análogos a los que conocía la metamatemática se encontraban, al mismo tiempo, en el terreno de la lógica. Por lo demás, ambos órdenes de investigación se encuentran actualmente asociados íntimamente. Cuando aún la axiomática se encontraba en sus comienzos, la condición de la lógica podía parecer, debido a su situación inicial, como privilegiada. Una teoría axiomatizada retiraba su significación y su verdad usuales a los términos y postulados sobre los que se edificaba, mas para esta edificación hacía un llamado a teorías anteriores cuya verdad y sentido ya se encontraban presupuestos. Y en el punto de partida de estas teorías previas, anteriores a todas las otras, se encontraba la lógica. Sin duda se podía afirmar de ésta que se axiomatizaba a sí misma puesto que de allí en adelante se presentaba, desde Frege y en especial en la gran síntesis de Russell y Whitehead, como un sistema deductivo en el que estaban despejados expresamente términos primeros y proposiciones primeras. Sólo que todavía no se daba aquí, si es posible decirlo, sino sólo una axiomática concreta. Los términos conservan aquí, más o menos, su acepción usual precisada sólo por las relaciones que enunciaban los postulados. Y éstos eran verdaderos axiomas, a la vez proposiciones primeras y evidencias intelectuales. El sistema tenía un sentido pleno y una verdad absoluta que se propagaban, mediante las definiciones y las demostraciones, a los términos derivados y a los teoremas. Al proponerse fundar la aritmética, y por su intermedio todo el edificio de las matemáticas sobre la lógica, el "logicismo" de Frege y de Russell tendía a algo muy distinto que proseguir simplemente el movimiento de retroceso hacia los principios; pensaba en llevarlo hasta su término, alcanzar la roca, el último fundamento. Los términos primeros de la axiomática peaniana se mantenían relativamente indeterminados, comportando una pluralidad de interpretaciones; las proposiciones primeras padecían la misma indeterminación y, al ser funciones proposicionales más que proposiciones, no constituían ni podían hacerlo el objeto de una afirmación categórica.

Definiendo estos términos esencialmente variables con la ayuda de constantes lógicas, pensadas como otras tantas esencias intemporales, demostrando estos postulados, extraños hasta ahí a lo verdadero y a lo falso, recurriendo a la ayuda de los principios lógicos, concebidos como otros tantos axiomas que se imponen absolutamente al pensamiento, Russell pretendía dotar a los principios de las matemáticas, y en consecuencia a todas las deducciones subsiguientes, de un sentido absoluto y de una verdad absoluta. La matemática dejaba de ser esta ciencia "en donde no se sabe nunca de qué se habla ni si lo que se dice es verdadero" y volvía a ser categórico-deductiva al modo de la lógica de la cual extraía toda su sustancia.

Pero el crepúsculo de las evidencias no tardaría en alcanzar también a la lógica. Ya la aparición, con ocasión de la teoría de los conjuntos, de antinomias de las cuales se advertía que el origen debía ser buscado en su nivel, y luego el desacuerdo profundo que se había manifestado, en su discurso, acerca de la validez de éste o aquél de sus principios, comenzaron a conmover la idea de una legislación lógica absoluta, única y universal. La nueva orientación que hacia 1920 algunos lógicos comienzan a dar a su trabajo iba, ahora, a desagregar la lógica desde su interior. Pasó con ella lo que unos decenios antes había pasado con la geometría. Del mismo modo en que ésta dejó de ser única con la aparición de las geometrías no-euclidianas después de haber sido intuitiva porque se la puso en forma axiomática, en la misma forma la lógica se pluraliza y se axiomatiza. Resultaba inevitable que la lógica, transformada en deductiva, se transformara también en el sentido de una axiomática abstracta. Las razones que invitaban a dejar de lado, en el desarrollo de un sistema, el sentido intuitivo de los términos, por temor a que pasara inadvertido en los razonamientos ulteriores, tenían valor para la lógica como para cualquier otra disciplina deductiva. En los términos de la teoría resultaba necesario no ver sino el soporte de las relaciones enunciadas en los postulados. De este modo las proposiciones de la lógica, despojadas así de su sentido propiamente lógico --como lo estaban las de la geometría de su sentido propiamente geométrico—, se convierten pues en formas puras, meras tautologías como lo entenderá Wittgenstein. Esto es, enunciados que estrictamente no dicen nada acerca de lo real pero que, por esta razón, se mantienen válidos cualquiera que sea el contenido concreto que se vierta en ellos. Esta interpretación formal de la lógica favorece la aparición de lógicas no-clásicas del mismo modo que, por una acción recurrente, éstas vienen a reforzarla. Porque si los principios son establecidos sólo hipotéticamente, no hay ya nada que prohíba establecer otros, modificar éste, eliminar aquél. Así se pasa de la lógica a las lógicas que uno construirá a su voluntad. A su vez, tal pluralidad de lógicas retira su privilegio a la lógica clásica, que sólo es un sistema entre otros y, al igual que ellos, una simple arquitectura formal cuya validez depende sólo de su coherencia interna.

Sólo que la analogía, con respecto a la geometría, deja de ser, en este punto, esencial, dado que la lógica no dispone ya de ciencias anteriores de las que pueda hacerse uso para construirla como una axiomática formal. Ya, a medida que se remontaba la escala de las ciencias iba en aumento la dificultad de no presuponer nada en el trabajo de la axiomatización que perteneciera a la ciencia de la cual se trataba. Por ejemplo, en el caso de la aritmética la pluralidad numérica. Con la lógica, la dificultad llega a convertirse en una imposibilidad absoluta, pues necesariamente hace falta una lógica que regule las operaciones del axiomático. Seguramente es posible vigilar para poder ajustar la lógica que se está axiomatizando sobre la misma que sirve para axiomatizarla para hacer, dicho en otra forma, que la lógica operatoria se aplique sobre la lógica axiomatizada como uno de sus modelos posibles. No obstante, subsisten dudas bastante vergonzosas: primero, ¿se está seguro de poder lograr una correspondencia completa entre las dos? Ya a los primeros artífices de la lógica simbólica no se les había escapado observar que determinadas reglas de la deducción formal no podían ser incluidas en el formalismo, como la licencia de reemplazar, dentro de una fórmula del cálculo, las variables por constantes individuales, permiso sin el cual la fórmula no tendría ningún uso, puesto que sería presupuesta necesariamente dentro del uso de toda forma simbólica que pretendiera expresarla. De este modo resultaría necesario distinguir en forma clara entre los axiomas y las reglas, entre los enunciados que integran el cálculo y aquellos que lo regulan, dominando de alguna manera estos últimos al cálculo mismo, pero siguiendo siéndole exteriores. Tal distinción naturalmente va a imponerse a toda tentativa de axiomatizar la lógica, lo cual indica que resulta imposible llevar a un término final la obra de la axiomatización, la reducción de lo intuitivo, que será reabsorbido por la lógica. Siempre subsiste algo anterior, lo intuitivo previo, pues si las proposiciones del cálculo pueden, o deben, ser vistas como únicamente formales, por el contrario, las proposiciones *sobre* el cálculo no pueden ser vaciadas de significado y necesariamente deben ser entendidas en su sentido intuitivo. Por otro lado, la multiplicación de las lógicas no simplifica el asunto. Con una lógica que es considerada única y absoluta, la correspondencia entre su forma axiomatizada y su uso operativo, aunque continuara siendo parcial, al menos quedaba establecida como algo perteneciente a ella misma. Esto no puede ya ocurrir en el caso de las lógicas construidas *ad libitum,* dado que su multiplicidad y diversidad les prohíben referirse por igual a nuestra lógica operatoria, de la cual sería laborioso aceptar que fuera igualmente maleable.

22. La metalógica

En tal forma, la axiomatización de la lógica la fuerza al desdoblamiento, no sólo al que es propio de toda axiomática que permite se haga de ella una lectura abstracta o concreta, sino también al que demanda la anterioridad de la actividad constructiva, tomando como referencia toda construcción formal. En su totalidad, la axiomática formal se encuentra rodeada por un dominio intuitivo: por debajo, las interpretaciones concretas que de ella se puedan dar, los modelos, que por lo general le han servido de base; por arriba, las ciencias que le son anteriores y que intervienen, en su proceso de edificación, con su verdad categórica y significado intuitivo. Pues bien, la colocación de la lógica, al extremo de la escala de las ciencias, le impide apoyarse en una ciencia previamente constituida. No obstante, si se desea expresar el saber que va implícitamente empleado en el trabajo de la axiomatización de la lógica, será imposible efectuarlo dentro de la lógica, sino en una nueva disciplina cuyo objeto serían las fórmulas de la lógica axiomatizada, así como las reglas de su manejo. La metalógica desempeña en esta forma, en relación con la lógica, el mismo papel que la metamatemática en relación con las matemáticas. Sin duda resultaría exagerado afirmar que nació de la axiomatización de la lógica, pues en cierto sentido todos los lógicos habían hecho ya, en cierto grado, metalógica, aunque sin saberlo. La axiomatización los obligó a tomar conciencia y a distinguirla en forma expresa de la lógica a la cual está vinculada como su objeto. A una lengua objetiva, como lo es el cálculo formal, viene a sobreponerse una metalengua que comprende especialmente las reglas de sintaxis del cálculo formal y las reglas semánticas de su interpretación concreta.

Por supuesto, nada impide tomar ahora, a su vez, la metalengua como objeto de estudio y formular su sintaxis y organizarla posteriormente en una teoría deductiva, la cual podrá ser axiomatizada, simbolizada y formalizada. Sólo que por esta razón se empleará una metalengua nueva o, si así se desea, se creará el objeto de una metalógica nueva. De este modo se puede, al menos en teoría, proseguir en forma indefinida tales escalonamientos, indicando con la palabra "indefinida", la imposibilidad de señalar un límite a la regresión formalizadora y eliminar en el punto de partida de la elaboración axiomática todo rastro de intuición.

IV. EL MÉTODO AXIOMÁTICO EN LA CIENCIA

23. Las ventajas del método axiomático

En sus principios, la formulación axiomática de una teoría deductiva podría parecer que tenía un interés limitado. Entre los matemáticos, gran cantidad de ellos no veían en ella sino poco más que un procedimiento elegante de hacer una exposición, cuyo refinamiento era muy superfluo, casi una especie de juego intelectual apto sólo para satisfacer espíritus en exceso escrupulosos en lo que respecta al rigor lógico, pero que se encontraba al margen del trabajo científico y verdaderamente productivo. Debido a su carácter deliberadamente formal, ¿no se prohibía la axiomática a sí misma enriquecer con sustancia alguna de carácter nuevo el contenido de nuestro conocimiento? Su utilidad como método aún parecía dudosa, no sólo en lo que toca a sus aplicaciones prácticas, sino incluso al interior de la ciencia pura. No obstante, la historia de la ciencia muestra en forma excesiva que, con frecuencia, las investigaciones inicialmente más desinteresadas son las que al final se revelan como las más fecundas.

Después de todo, un espíritu escéptico ¿no habría expresado objeciones muy parecidas en el momento en que los griegos, al poner en forma deductiva todo un cuerpo de verdades empíricas, construyeron las matemáticas como una ciencia racional, iniciando en esta forma a la humanidad en la era científica?

Si se reflexiona sobre ellas, las ventajas del método axiomático resultan manifiestas. En primer lugar constituyen un instrumento precioso de abstracción y análisis. El paso de una teoría concreta a la misma teoría axiomatizada, formalizada posteriormente, renueva, prolongándolo, el trabajo de abstracción que lleva, por ejemplo, de un número concreto (un montón de manzanas o de guijarros) al número aritmético, y después de la aritmética al álgebra, reemplazando los términos individuales por variables de las cuales sólo están determinadas las relaciones. Y, en fin, del álgebra clásica a la moderna, en la cual no sólo los objetos sino también las relaciones que se efectúan sobre estos objetos llegan a su vez a ser concretamente indeterminadas, fijadas sólo por algunas propiedades fundamentales muy abstractas. Por otro lado, ante el tratamiento axiomático, las nociones fundamentales de una teoría quedan con frecuencia confusas, tienen comprehensiones que son a la vez demasiado ricas e insuficientemente explicadas. Nada garantiza entonces que estos elementos diversos continuarán siendo siempre compatibles, y nada nos precave en contra del peligro de resbalar en forma inconsciente en nuestros razonamientos de uno a otro. El método axiomático prosigue el análisis de las nociones primeras, obligando a aislar ciertas propiedades enunciadas expresamente en los axiomas y a usar únicamente a ellas o lo que se haya deducido de ellas.

Un progreso en la abstracción va siempre a la par con un progreso en lo general, dejando caer algunas de las determinaciones disociadas por el análisis. La reducción de la comprehensión elimina las restricciones y asegura el ensanchamiento de la extensión. Russell afirma que generalizar es transformar una constante en una variable, y tal es precisamente el trabajo del axiomático cuando sustituye la recta, la congruencia, por x, y…, que satisfacen a las relaciones que enuncian los postulados. De este modo, cuando descartamos las significaciones intuitivas, que siempre son especiales, no sólo nos hacemos capaces de pensar en forma más desembarazada la teoría inicial, sino que, de golpe, se forma un instrumento intelectual plurivalente que puede utilizarse en todas las teorías isomorfas a la primera. Del mismo modo que una función es, como se ha dicho, un molde de proposiciones, una teoría axiomatizada llega a ser una especie de "función teórica", un molde de teorías concretas. El defecto de la univocidad, lejos de perjudicar a las definiciones por postulados, por lo contrario constituye su interés. La indeterminación de una estructura formal no puede considerarse una indigencia desde el momento en que no es una cualquiera, sino que se encuentra regulada por condiciones muy precisas. La pluralidad de los posibles, en los límites precisamente delimitados, representa por lo contrario una verdadera riqueza virtual. Se obtiene de este modo, por la axiomática, una economía importante de pensamiento, pues se reúnen varias teorías en una, lo múltiple se piensa en uno.

Pero también se gana bastante para el mismo saber. Primero, en su organización de conjunto. Al igual que la anatomía comparada, guiada por el principio de la identidad de plan, discierne en su pintoresca variedad los órganos homólogos, así también la axiomática, al descubrir las analogías formales, revela correspondencias insospechadas entre los dominios diversos de una misma ciencia e incluso parentescos entre ciencias que al parecer eran ajenas o lo parecían. Al poner de relieve la *estructura invariante* que es común a teorías que al parecer son heterogéneas, se hace posible dominarlas mediante el pensamiento y, en una visión más sintética, abrazar con la mirada vastos paisajes intelectuales que sólo se conocían fragmentariamente, en lo cual encontrarán provecho los espíritus que se encuentran más atentos al acrecentamiento cuantitativo de los conocimientos que a su organización armoniosa. Pues tal organización hace sensibles las lagunas que la analogía invita a llenar. Cada teoría saca provecho de las que, en la actualidad, se denominan emparentadas. Se transfieren aquí, donde no lo sugería nada intuitivo, los resultados adquiridos en otras partes. El rigor del método de exposición conduce así, en última instancia, a su fecundidad para el descubrimiento.

A estas ventajas, que ya en primer grado ofrecen las primeras axiomáticas, vienen en forma natural a combinarse, en las axiomáticas formalizadas, las de todo cálculo simbólico: seguridad, objetividad. El carácter ciego y cuasi mecánico de sus procesos no es, en forma alguna, su menor interés, pues permite que sean ejecutados por una máquina, reservándose así el espíritu para las operaciones de nivel superior. Mediante la simbolización y la formalización de las teorías, y por medio de los isomorfismos así revelados, las grandes computadores de EUA están pasando a ser, si no “máquinas repensar” verdaderas, al menos auxiliares científicos cuyas aptitudes superan muy ampliamente la ejecución de las operaciones o problemas que son puramente numéricos. Y de entre los problemas numéricos que son capaces de resolver figuran, precisamente, los *problemas de decisión* acerca de las axiomáticas formalizadas. Tales usos aún son nuevos y sus desarrollos aún imprevisibles, pero se piensa que ya sin ayuda de las máquinas y para el espíritu reducido sólo a sus recursos, la simbolización y la formalización elevan la abstracción axiomática a la segunda potencia, si se puede decir así.

24. La axiomatización de las matemáticas

Resultaría en extremo difícil medir con precisión la parte que le corresponde al método axiomático en el desarrollo de las matemáticas modernas. Más que de una causalidad bien orientada, indudablemente sería obligado hablar con frecuencia de acciones recurrentes o conjugadas. La teoría de los grupos, por ejemplo, de la que ha sido posible decir que es la matemática despojada de su sustancia y reducida a su forma pura, nació antes que ella y se desarrolló inicialmente en forma independiente. No obstante, el espíritu en que se inspira está tan de acuerdo con la axiomática, y los problemas son a menudo tan cercanos, que ambos órdenes de investigaciones se encuentran en la actualidad relacionados muy íntimamente.[27] Precisamente porque no se trata de una invención aislada y localizada, surgida en forma accidental, y porque tiene su apoyo en las mismas tendencias que caracterizan el espíritu matemático europeo, las cuales no han hecho otra cosa que exasperarse desde hace más de 100 años, es la causa por la cual el método axiomático no logra disociarse del todo. Sus rasgos característicos ya son reconocidos fácilmente en el pensamiento matemático clásico: abstracción y generalización crecientes, rechazo a

[27] *Cf.* G. Juvet, *La structure de nouvelles tliéories physiques,* p. 169. “Toda geometría coherente constituye la representación de cierto grupo. Ahora bien, toda geometría descansa igualmente sobre un sistema de axiomas, de modo que toda axiomática es igualmente, desde cierto punto de vista, la representación de cierto grupo, el grupo de operaciones que definen los axiomas y que actúan sobre los objetos de los que tratan tales axiomas.” *Cf.,* del mismo autor, *L’axiomatique et la théorie des groupes,* Congrés Intem. De Phil. Scientifique, 1935, vol. VI.

la intuición que se sustituye con la lógica, subordinación del contenido a la estructura, establecimiento de correspondencias unificadoras, etc. No resulta menos cierto por esto que Hilbert, al haber enseñado a los matemáticos a *"pensar axiomáticamente"* haya modificado profundamente el "estilo matemático", precisamente donde el método axiomático no se emplea en forma sistemática.[28]

Pero éste lo es cada vez más. Toda teoría matemática, desde la aritmética y la teoría de los conjuntos hasta el cálculo de probabilidades, ha sido ya axiomatizada y, con frecuencia, en formas múltiples. En Francia, el gran tratado que se publicó bajo el pseudónimo —genérico— de N. Bourbaki, se propuso exponer, mediante este método, todo el conjunto de las matemáticas. Bien se entiende que en el caso de una teoría que se encuentra todavía muy cercana a sus orígenes concretos, como es el caso de las probabilidades, la forma en que la axiomatización desembaraza a la ciencia de los problemas concernientes a la esencia de las entidades de las que trata, y que son problemas de los cuales hasta hace poco una ciencia racional no pensaba poder liberarse. La parte más difícil de un tratado de las probabilidades era, con frecuencia, la introducción, en la cual el autor se sentía obligado a precisar lo que significaba esta noción mediante la cual pretendía hacer ciencia. Quedaba entonces atrapado en este dilema, o bien nos remitía a la intuición al hablar de cartas, bolas, dados, centavos; o bien daba una definición abstracta en la que podía disimular bien, mas no suprimir, la circularidad: la probabilidad, la relación del número de casos favorables con la de los casos posibles *con la condición de que éstos sean igualmente probables.* Esta notoria dificultad ilustra sorprendentemente lo que tiene de incómoda y transitoria la fase de la deducción concreta, en la cual se debe y no se puede justificar los principios. Las cosas quedaban claras en la fase empírica e inductiva. Al dejarnos guiar por nuestro sentimiento intuitivo de las probabilidades podríamos ver, por ejemplo, que no existe razón alguna para que caiga águila o sol. Y después llegamos a establecer las dos leyes, que la experiencia verificará, de las probabilidades totales y de las probabilidades compuestas. Y esto volverá a resultar claro en la fase axiomática, la de la deducción abstracta: ambas leyes quedarán establecidas ahora como principios.

Tal purificación conceptual iniciática constituye apenas el beneficio menor que es posible obtener del método. Como se ha visto, el análisis axiomático destaca las estructuras de las teorías particulares que se encuentran ya constituidas, revelando así las analogías formales entre teorías con frecuencia muy alejadas en su contenido y que por esta razón permanecen como si fueran independientes. Tal es el caso, por ejemplo, de la teoría de la medida y el cálculo de probabilidades. Del mismo modo se descubren estructuras topológicas en conjuntos de elementos que

[28] *Cf.* J. Dieudonné, David Hilbert en Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique, Rev. De Metaph.,* 1935, pp. 375-384.

no son ya puntos, sino funciones o, incluso, elementos que son esencialmente discontinuos como los números enteros. La teoría de los espacios abstractos, o topología general, que se debe a M. Fréchet, se convierte así en uno de los frutos más bellos del método axiomático. Las teorías matemáticas son igualmente puestas en correspondencia con teorías extramatemáticas, especialmente con teorías lógicas. El cálculo de probabilidades con ciertas lógicas plurivalentes; la topología con determinados cálculos de lógica modal; teorías antiguas, puestas en claro con una luz nueva procedente del isomorfismo, pueden experimentar desarrollos inesperados. La similitud de funciones lleva también a crear, para una teoría, nociones abstractas que no podían sugerir nada en tanto se encontraban sujetas a su interpretación primigenia. De este modo nacen seres matemáticos nuevos.

No sólo se aprovechan del tratamiento axiomático las teorías particulares, sino que toda la fisonomía del conjunto de las matemáticas se encuentra transformada. Debido a parentescos insospechados que se revelan de pronto, se redistribuye el universo matemático. El orden tradicional,[29] que repartía las disciplinas matemáticas de acuerdo con los objetos de estudio (aritmética, álgebra, análisis infinitesimal, geometría) parece en la actualidad tan superficial como el de las antiguas clasificaciones zoológicas que agrupaban a los animales de acuerdo con sus semejanzas exteriores (acuáticos, terrestres, aéreos) en lugar de basarse en las similitudes de su estructura. Se coordinan ahora teorías que tratan acerca de objetos muy diferentes pero que se encuentran dotados de propiedades formales análogas. La teoría de los números primos se halla muy cercana a la de las curvas algebraicas, la geometría euclidiana a las ecuaciones integrales simétricas. Y la subordinación se basa sobre la jerarquía de las estructuras, que van de las más simples y generales a las más complejas y más especiales.

En primer lugar, algunas estructuras maestras que tienen un carácter más amplio: estructuras algebraicas, estructuras de orden, estructuras topológicas. A continuación estructuras que son ya más complejas y diferenciadas, en las que se combinan orgánicamente dos o más de estas estructuras maestras, como por ejemplo el álgebra topológica. Después sólo teorías más especiales en las cuales los elementos empiezan a cobrar una individualidad mucho más marcada. Es en este nivel donde se reencuentra la mayor parte de las teorías de la matemática clásica. Sólo que en lugar de permanecer independientes y casi aisladas, se ven ahora determinadas por entrecruzamientos diversos de algunas teorías más generales. Por ejemplo, el conjunto de los números reales puede ser considerado como un cuerpo o como un conjunto ordenado, o bien como un espacio topológico, etc., de modo

[29] La parte final de este párrafo se encuentra inspirada directamente por N. Bourbaki, *La architecture des mathématiques,* en Le Lionnais, *op. cit.,* pp. 43-44; J. Dieudonné, *L'axiomatique dans les mathématiques modernes, Congrés intern. De Phil. Des Sciences,* 1949, III, p. 48; Chevalley, art.cit., pp. 383-384.

que las propiedades de los números reales son, por una parte, las que es posible leer en los teoremas que les son aplicables de cada una de las teorías correspondientes y, por otro lado, las que resultan de la validez simultánea de estas teorías diversas o de varias de entre ellas.

25. La axiomatización en las demás ciencias

El sistema axiomático no se aplicó exclusivamente a las matemáticas sino que se desbordó por todos lados.

No constituirá sorpresa alguna que un método cuyo propósito es suplantar la intuición por la lógica haya encontrado su campo de elección en la misma lógica. Esta ciencia hace en la actualidad un empleo sistemático y regular de ella y, al contrario, su uso va disminuyendo a medida que se desciende en la escala de las ciencias, cuando se pasa de la mecánica a otras partes de la física y, de allí, a las ciencias de la naturaleza. Podría decirse que no ha excedido aún el dominio de la física. Los ensayos que se han hecho en el campo de otras ciencias, como Woodger lo intentó con la biología, continúan siendo esporádicos y su interés radica exclusivamente en la curiosidad que provocan. No se trata de que ninguna ciencia rechace, por su naturaleza misma, su empleo, pero éste, para que rinda frutos, sólo debe llegar a su hora y en el momento en que la ciencia en cuestión alcance cierto grado de madurez. Existe una especie de ley del desarrollo de las ciencias que las hace pasar en un orden irreversible, y cada una de ellas, a su turno, de acuerdo con el rango que ocupan en la jerarquía, por cuatro etapas sucesivas: la descriptiva, la inductiva, la deductiva y la axiomática. Una axiomática queda en una especie de vacío si no es construida sobre una teoría deductiva previa, la cual carece de valor científico si no organiza un vasto conjunto de leyes adquiridas inductivamente, tras una prolongada exploración de los fenómenos. La física inductiva en los siglos XVII y XVIII dio paso, en el siglo XIX, a la era de las grandes teorías deductivas y, en la actualidad, ha llegado al punto en el cual el tratamiento axiomático le es ampliamente aplicable.

No siempre han sido sus partes iniciales en el tiempo las que han obtenido más beneficios de este tratamiento. Determinadas características de las teorías nuevas —que, por supuesto, se apoyan en todo conocimiento adquirido con anterioridad, incluso cuando éste es corregido— las predestinaban a ello, y no sólo el hecho de que nacieran en la misma estación en que la axiomática florecía. En primer lugar, su carácter altamente abstracto y formal que inevitablemente resulta, entre otras muchas razones, de que han dejado de existir dentro de la escala de nuestra intuición. Una física de lo inmenso y una física de lo ínfimo desconciertan nuestro poder de representación concreta: la *curvatura* del espacio-tiempo, el *spin* del electrón no tienen ya sino un valor muy débilmente analógico. Incluso esta lejana alusión a la imagen se desvanece del todo con el simbolismo matemático, el único que da a las teorías su expresión exacta. Además, ciertas particularidades que son esenciales a la nueva física favorecen e incluso imponen el uso del método axiomático. Como lo explica J. L. Destouches, "una física en la que todas las medidas simultáneas no son posibles no puede ser una física de las propiedades intrínsecas y debe limitarse a ser una física de relaciones".[30] Una física así necesariamente debe ser *estructural.* Demanda en forma expresa la subordinación de los términos a las relaciones, que es tan característico del ordenamiento axiomático.

Si es que no se ha extendido mucho el uso de exponer axiomáticamente el contenido de la física clásica no se debe a que este asunto presente dificultades especiales, al menos para las partes ya sistematizadas.

La axiomática consiste en el perfeccionamiento de la teoría deductiva, lo cual también significa que toda puesta en forma deductiva encamina ya por la ruta de la axiomática. La costumbre de duplicar el lenguaje mediante el simbolismo matemático ha acostumbrado a los físicos desde hace mucho tiempo a distinguir no entre teorías con imágenes y teorías abstractas, como entre dos aspectos, uno concreto y otro simbólico de la misma teoría. Pero de acuerdo con la comparación de Poincaré, las imágenes no son sino vestiduras sometidas al capricho de la moda, en tanto que la verdadera teoría, la que permanece, es el sistema de ecuaciones, esto es, de relaciones. Del mismo modo, no han dejado de observar las similitudes formales que se dan entre ecuaciones o sistemas de ecuaciones que pertenecen a capítulos de la física que son concretamente distintos y que, por ejemplo, rigen unos a los fenómenos mecánicos y otros a los fenómenos electromagnéticos: entonces, los isomorfismos les son familiares. Pero ya dentro de la organización conceptual que presupone el establecimiento de leyes, el trabajo de abstracción hace un llamado a las axiomáticas ulteriores. Si la física es una ciencia de lo concreto en el sentido de que descansa sobre lo real, por lo menos los términos entre los que se establecen las relaciones que enuncian las leyes son, por completo, algo distinto a los objetos concretos. La masa, la fuerza, la potencia, la resistencia, son entidades abstractas sugeridas seguramente, como su nombre lo indica, por imágenes, pero cuyo sentido propiamente científico queda fijado exclusivamente por las relaciones que sostienen entre ellas y con otras de naturaleza semejante.[31] Las nociones intuitivas han servido, en su origen, para establecer las leyes, pero una vez elaborada la red de leyes la perspectiva se ha invertido: es el conjunto de leyes de la mecánica clásica, de la termodinámica, de la óptica el que da, de las nociones fundamentales de cada una de estas teorías, una "definición disfrazada". Para descartar definitivamente

[30] *Essai sur la forme générale des théories physiques,* p. 102.

[31] *Cf.* J. Ullmo, *Physique et axiomatique, Rev. De Métaph.,* 1949, pp. 126-138.

tales significaciones intuitivas adventicias e inoportunas, para exponer en su pureza intelectual el sistema de las relaciones, ningún método podría ser más eficaz que el método axiomático.

26. Los límites del método axiomático

Las ventajas que ofrece este método no deben, sin embargo, disimular sus límites. En primer lugar no se debe olvidar que sólo representa una de las fases de la ciencia y que incluso el lógico y el matemático no se desinteresan de ninguna manera de la verdad material de sus proposiciones. El aritmético bien puede pretender que la descuida, pero sin embargo no deja de acoger, aparte de situarlos en un nivel inferior, muchos "teoremas empíricos", que en realidad son verdaderas leyes inductivas. Pero en el lugar preciso en que se procede axiomáticamente, no sería posible llevar adelante el método hacia donde apunta. Este se propone perseguir a la intuición para sustituirla no ya por el razonamiento sino por un cálculo, por un manejo regulado y privado de símbolos. En realidad el formalismo no es capaz de funcionar sin alimentarse, en éste u otro lugar, de la intuición. Y, en primer lugar, de la intuición concreta que lo sostiene.

Sólo ocurre en los libros que una axiomática comienza con los axiomas y, en el espíritu del axiomático, ahí termina, pues presupone la deducción material a la que da forma, y ésta, a su vez, ha requerido un largo trabajo inductivo previo para poder reunir los materiales a los que da organización. Sobre estas bases, el trabajo verdadero del axiomático es descubrir los axiomas y, de hecho, no deducir las consecuencias de principios dados, sino por el contrario, frente a cierto conjunto de proposiciones, descubrir un sistema mínimo de principios de los cuales se puedan deducir. Al análisis inductivo que, de los hechos se remonta de las leyes, sucede el análisis axiomático que, prosiguiendo la obra de sistematización deductiva, se remonta de las leyes a los axiomas. Una vez que éstos han sido traducidos a símbolos, con sus reglas de funcionamiento, el formalista podrá olvidar las significaciones intuitivas iniciales. Éstas no han requerido menos el diseño de su construcción y solas, incluso ahora, hacen comprender las líneas maestras y los contornos y aseguran su unidad: unidad orgánica y no mera yuxtaposición accidental de axiomas. El defecto de una presentación axiomática abrupta, en el momento en que afecta a espíritus que no se encuentran preparados, se encuentra precisamente en esta impresión irresistible de arbitrariedad y vacuidad. La axiomática prácticamente no presenta interés a quien previamente no ha asimilado el conjunto de conocimientos concretos que ordena cuando los esquematiza. No es sólo por juego que se construye una axiomática, y los instrumentos intelectuales se encuentran hechos para ser utilizados. Incluso el teórico puro, que deja a los demás el uso de los instrumentos, no se encuentra menos constreñido a tomar en consideración un modelo: el modelo simbólico mismo.

Se pone otro límite al uso del método axiomático: el teorema paradójico de Skolem. A todo sistema que excede un nivel muy elemental y que comporta un modelo en un dominio cualquiera, es posible asignarle también un modelo en el dominio de los números naturales. Ahora bien, el conjunto de los números naturales constituye un infinito enumerable, que es la potencia más débil de los conjuntos infinitos. De este teorema resulta que el tratamiento axiomático desvanece de cierta forma todas las potencias superiores. Por ejemplo, el continuo no puede ser concebido en su especificidad estructural, pues toda axiomática que se dé conllevará un modelo enumerable. Los resultados obtenidos posteriormente por Von Neumann muestran que la potencia de un conjunto es relativa a la axiomática empleada, y van en el mismo sentido. Constituía una ventaja del método axiomático reunir, por la identidad de su estructura, una pluralidad de sistemas isomorfos. Si ahora los sistemas que reúne pueden no ser isomorfos es porque deja escapar ciertas particularidades de las estructuras y que[32] ya no basta para diferenciarlas. Será necesario recurrir a la intuición para distinguirlas.

Si la intuición concreta la limita por la parte inferior, la axiomática permanece del mismo modo en contacto, por la parte superior, con una intuición intelectual que ella indudablemente puede repeler cada vez más lejos, pero en modo alguno suprimir. La intuición se refugia de la teoría en la metateoría, y luego que ésta queda reducida a un sistema formal, en la meta-metateoría y así en forma interminable. Siempre el manejo del simbolismo exige un sobrevuelo del espíritu. Los teoremas de Gödel han puesto de manifiesto a los propios formalistas, pues en este caso desempeñan un papel comparable al del principio de incertidumbre formulado por Heisenberg en el campo de la física cuántica. Del mismo modo que la intervención de la actividad experimental en el contenido de la observación no puede agotarse en forma indefinida, esto ocurre en la misma forma con la intervención de la actividad mental en las axiomáticas simbolizadas y formalizadas. Ya sea que se alegre o se preocupe uno por esto resulta imposible eliminar el sujeto. De allí proviene la reacción del intuicionismo: “No podemos aceptar que el camino de la ciencia

[32] Recordemos que se dice que dos conjuntos tienen la misma *potencia* cuando es posible establecer entre sus elementos una correspondencia biunívoca (esto es, que a todo elemento del uno corresponde uno y un solo elemento del otro, y recíprocamente); que, para conjuntos finitos tener la misma potencia se reduce a tener el mismo *número* de elementos; que para los conjuntos infinitos la potencia más débil es la del *enumerable* (la sucesión indefinida de los números naturales); que la potencia del *continuo* (por ejemplo, la de los puntos de una línea, o del, conjunto de los números reales) es superior a la del enumerable; en fin, que siempre es posible construir un conjunto cuya potencia supere la de un conjunto cualquiera.

conduce a la eliminación del espíritu."[33] Incluso con sistemas lo suficientemente rudimentarios como para que no funcionen en ellos aun las interdicciones de Gödel, resulta claro que la percepción de una correspondencia analógica entre la interpretación objetiva y la interpretación sintáctica de las mismas fórmulas necesita, del mismo modo que la inteligencia, de un retruécano, de una iniciativa espiritual y que, por lo general, una cierta constelación de signos, negro sobre blanco, no alcanzará a ser, por decir algo, la demostración de una no-contradicción, sino exclusivamente para un espíritu que sepa leerla como tal.

El beneficio que provee el método axiomático no es el de excluir la intuición, sino contenerla y retrocederla hacia el terreno estrecho donde resulta irremplazable y posee la ventaja de sustituir el órgano por el instrumento, a continuación el instrumento por la máquina para, finalmente, dotar a la máquina de aparatos de autorregulación. Por más perfeccionada que se la pueda imaginar, sólo su funcionamiento —por no mencionar su construcción o su empleo— demandará siempre del control humano ni nunca podrá evitar intervenciones procedentes del exterior, aunque fuesen en grado cada vez menor, cada vez más mínimas y espaciadas. Del mismo modo que una máquina, un mecanismo intelectual no resultaría seguro del todo si se tuviera la certeza total de que no tiene ningún defecto, que no está expuesto a sufrir una avería o a enloquecer, que en modo alguno surgirá una ambigüedad del tipo que sea acerca del modo de aplicar las reglas, o bien, que nunca se nos arroje a una alternativa indefinida de afirmaciones y negaciones que recuerden las antinomias cantorianas. Resulta sin duda más justo solicitar a la intuición y al formalismo que se controlen mutuamente, garantizando así el formalismo contra los errores de una intuición intemperante, aunque con la condición de que él mismo quede sometido a la vigilancia de una intuición aminorada.

Por lo demás, nadie ha impugnado en forma seria el papel que mantiene la intuición en el descubrimiento. Cualquiera que sea la fecundidad de un método, su oficio es, sobre todo, de consolidación y, si se quiere, de prolongación, pero sobre un terreno previamente fijado. El método pone en orden lo adquirido y, al hacerlo, llena las lagunas y explota las aperturas, mas no inicia nada que sea esencialmente nuevo. Los descubrimientos revolucionarios son obra del genio que logra trastornar los métodos. Descubrir, probar, nada le resulta menos indispensable a la ciencia que requiere del espíritu de la aventura como del espíritu del rigor. Vistos en esta forma, incluso la intuición y el formalismo se complementan de acuerdo con la diversidad de los espíritus y los cambios de la historia. Un autor al que no se le puede acusar de tibieza para con la axiomática expresamente se encuentra de acuerdo con lo anterior. Durante los periodos de expansión, cuando surgen ideas nuevas, resulta con frecuencia muy difícil delimitar con precisión las condiciones

[33] A. Heyting, en F. Gonsetti, *Philosophie matématique*, 1939, p. 75.

de su empleo y, por decirlo de una vez, resulta imposible hacerlo en forma razonable sino hasta que adquiere una larga práctica de tales ideas o nociones, lo que requiere un periodo de desmalezamiento más o menos amplio en el que dominan la incertidumbre y la controversia. Pasada ya la edad heroica de los exploradores, la siguiente generación puede entonces dedicarse a codificar su obra, eliminar lo superfluo y sentar sus bases. En una palabra, volver a poner en orden el edificio. En este momento reina nuevamente, sin división, el método axiomático, hasta la revolución siguiente que aportará alguna idea nueva."[34]

[34] J. Dieudonné, *L'axiomatique dans les mathématiques modernes,* recopilación citada, pp. 47-48.

V. EL ALCANCE FILOSÓFICO DE LA AXIOMÁTICA

27. La filosofía de las matemáticas

La constitución y el desarrollo del método axiomático no interesan exclusivamente al trabajo científico sino que se proyectan también sobre problemas filosóficos cuyo alcance va ensanchándose: la filosofía de las matemáticas, la filosofía de las ciencias, la filosofía del conocimiento.

En primer lugar, la axiomática abre una de las vías posibles para resolver el problema que ha dominado, desde principios del siglo XX, toda la filosofía matemática, esto es, las bases mismas de esta ciencia. Este problema, que hasta entonces prácticamente no había preocupado a los matemáticos, les fue impuesto en forma brusca debido a la crisis que produjo la formulación de la teoría de los conjuntos. Esta fue elaborada por G. Cantor en el último cuarto del siglo XIX. Tras afrontar numerosas resistencias la teoría de los conjuntos apareció definitivamente hacia 1900 como la base de todo el edificio matemático. La aritmética de los números finitos, mediante la cual se reconstruyeron las demás partes de las matemáticas, podía constituirse a la vez como un caso especial y particularmente simple e intuitivo de la teoría de los conjuntos: el de los conjuntos enumerables. Y, es precisamente en este momento, cuando aparecen al interior de la teoría "antinomias" o "paradojas", esto es, pares de teoremas contradictorios. El conjunto de todos aquellos conjuntos-que-no-se-contienen-ellos-mismos-como-elementos, ¿puede contenerse él mismo como elemento? Uno puede autoconvencerse con facilidad de que una respuesta afirmativa y una respuesta negativa a este mismo problema pueden justificarse del mismo modo. Tales dificultades ofrecen en este caso una gravedad considerable. Para una teoría que ha dejado de soportarse en nociones y verdades intuitivas y que en consecuencia carece ya de otra garantía de su validez que la coherencia formal, la menor fisura basta para comprometerla, su lógica tiene la obligación absoluta de ser infalible.

Desde un principio las investigaciones para encontrar una solución se han comprometido en tres direcciones. El "empirismo" de Borel y Lebesgue, posteriormente prolongado y reforzado por el "intuicionismo" de Brouwer, atribuye las dificultades al manejo ciego del instrumento lógico. Pero éste no ofrece ya garantía desde el momento en que se sale de los dominios donde ha sido largamente probado, y es por eso que extenderlo al dominio de lo transfinito resulta engañoso. En última instancia, es la intuición la que juzga la validez misma de las reglas lógicas, de modo que si se le da siempre prioridad sobre el discurso no se quedará uno expuesto ya a antinomias. En efecto, se las evita, pero ¿cuál es el precio? Si se siguen estos principios puede llevarse, en forma progresiva, a condenar partes considerables ya no sólo de la teoría de los conjuntos, sino también de buenas partes de teorías matemáticas antiguas y consagradas. Son muchos los que juzgan tal sacrificio excesivo, y la medicina como de caballo. Si se desea conservar la totalidad de las matemáticas clásicas con lo esencial de la teoría cantoriana y, al mismo tiempo, permanecer fiel a la inspiración de esta última, se intentará entonces, como lo hizo Russell, seguir la vía del "logicismo". Por un lado se conservará el propósito de construir las matemáticas a partir exclusivamente de las nociones y leyes de la lógica. Pero en vista de que éstas han conducido a antinomias a las que se trata de prohibir, se tendrán que reforzar por otro lado las normas de la lógica en forma tal que ya no permitan que se termine allí. Infortunadamente, resulta muy difícil conciliar ambas cosas pues, para que se dé a las normas de la lógica el grado exacto de normatividad conveniente para poder excluir las antinomias exclusivamente, se ve uno obligado a establecer determinados axiomas cuyo carácter extralógico apenas resulta discutible.

Queda una tercera vía por la cual Zermelo[35] intentará salir de este hoyo: la de la reconstrucción axiomática, solución que difiere de la precedente en que, si bien demanda siempre de axiomas que no permitan la producción de antinomias, no les impone que se les tome sólo del material lógico. No obstante, las condiciones que exige el establecimiento de una axiomática tal difieren mucho de las condiciones de las axiomáticas de Peano y Hilbert, en las que se iba sólo de las consecuencias a los principios. Se partía de teorías ya bien probadas, como la aritmética y la geometría clásicas, cuya consistencia nadie podía poner seriamente en duda y, en el momento en que los principios que se les asignaba les estaban adaptados con exactitud, no había que pedirles ya nada más, no resultaba ya indispensable que fueran evidentes y ciertos por ellos mismos, pues de antemano se estaba ya seguro de que no caían en contradicciones. Por el contrario, en este caso la existencia de antinomias demuestra que se trabaja en una zona de inseguridad, incluso cuando los axiomas sean escogidos de tal manera que eviten las antinomias conocidas. Pero, ¿qué garantiza que en otra parte no surgirán otras análogas? No resulta suficiente, pues, producir un sistema de axiomas que permita demostrar precisamente la parte aceptable de la teoría de los conjuntos; resulta necesario que los axiomas inspiren por sí mismos absoluta confianza. A la prioridad lógica deben adjuntarse la evidencia psicológica y ser a la vez fundamentos y principios. Veremos que uno de los axiomas de Zermelo se encontraba bien lejos de satisfacer esta condición o, por

[35] La axiomatización de los conjuntos será retomada y desarrollada posteriormente por autores muy diversos, en especial Fraenkel, Von Neumann y Bemays.

decirlo en forma más precisa, el problema de saber si la satisfacía o no dividió en dos campos a los matemáticos: si para unos el axioma denominado de "la selección" resultaba del todo evidente, para otros no era sino una fórmula vacía, un armado de palabras que gramaticalmente guardaba corrección pero que estaba desprovisto de sentido. Y las proposiciones equivalentes en que se hubiera podido pensar para sustituirlo, como la relativa a la posibilidad del "buen orden", sufrían el mismo defecto. La axiomática ingenua, confiada en el sentimiento de evidencia intelectual para justificar la selección de los axiomas se encontraba en un callejón sin salida.

Uno de los objetivos principales de la metamatemática de Hilbert es evitar el callejón sin salida, y salir de él sustituyendo mediante el razonamiento la intuición desfalleciente. La formalización de la axiomática requiere que pueda ser establecido, mediante la vía demostrativa y sin necesidad de apelar al sentimiento subjetivo de la evidencia, si un sistema de axiomas es congruente o no. Si esta demostración puede dárnosla favorablemente una axiomática de la teoría de los conjuntos, queda resuelto el problema del fundamento. Y debería estarlo, aun a los ojos de un intuicionista —para quien la no-contradicción es condición necesaria, aunque no suficiente, de la existencia matemática— siempre que la demostración satisfaga la exigencia de construcción en un número finito de etapas, lo cual según Hilbert es el criterio verdadero; por eso él, preocupado por no renovar controversias estériles, impuso condiciones muy severas a los procedimientos de comprobación. Las esperanzas que los "formalistas" pusieron en este método han sido, como se recuerda, frustradas en forma parcial. Especialmente, los teoremas de Gödel mostraron que la no-contradicción de los sistemas de los que se trataba no podía ser probada mediante una formalización que se mantuviera dentro de estos sistemas. Por su lado, la paradoja de Skolem contrapone a la axiomatización de la teoría de los conjuntos una dificultad esencial, pues resulta de ella que el tratamiento axiomático hace desvanecer ahí la distinción de las potencias diversas. Sin embargo, esta última restricción sólo concierne en forma directa a la teoría de los conjuntos y, por otro lado, el marco dentro del cual se encerró Hilbert, voluntariamente, permitía que fuera ensanchado un poco, sin por eso traspasar los límites que se asigna al intuicionismo, de suerte que las prohibiciones de Gödel se atenúan. En tales condiciones Gentzen, en 1937, llegó a demostrar la no-contradicción de la teoría de los números apelando exclusivamente a un único principio exterior a la teoría, y mostrando que éste no sobrepasaba los medios que se conceden al intuicionismo. Tal resultado es muy importante ya que la no-contradicción de numerosas teorías tenía su apoyo en la aritmética, que hasta allí había sido simplemente postulada.

Pese al hecho de que el formalismo axiomático no ha resuelto definitivamente el problema del fundamento de las matemáticas, resulta que tanto para él mismo como para las reacciones que suscitó, lo ha hecho avanzar considerablemente y, por otro lado, ha disminuido en forma notable las presiones sobre las doctrinas que inicialmente se le oponían. En la actualidad prácticamente se han desvanecido las diferencias que existían entre logicismo y axiomatismo, al punto que ambas tendencias se integran, como puede verse en algunos autores, Quine por ejemplo. La multiplicidad de las lógicas, que son tratadas en delante de acuerdo con los métodos de la axiomática formalizada, prácticamente no permiten ya dar a sus nociones de base un sentido absoluto, y el problema de saber dónde termina la lógica y comienzan las matemáticas ha perdido buena parte de su sentido. Las diversidades existentes a principios del siglo XX pueden hoy resumirse en una gran alternativa, ya sea que se conceda prioridad a la lógica o a la intuición. Incluso ambas partes se han aproximado lo suficiente como para poder comprenderse y trabajar mancomunadamente. Al llevar los problemas al plano de las construcciones simbólicas, el formalismo hilbertiano se expresa en un lenguaje accesible al intuicionista, en tanto que éste entró decididamente, siguiendo a Heyting (1930), en la vía de la axiomática formal. Bien puede rechazarse el formalismo axiomático, pero la axiomatización y la formalización han llegado a ser actualmente, como decía Cavaillès, uniformes obligatorios.[36]

28. La filosofía de la ciencia

Incluso antes de que el problema del fundamento se impusiera a la atención de los matemáticos la axiomática, nacida de una reflexión acerca del método de los geómetras, arrojó de inmediato una viva luz sobre la paradoja de esta ciencia, cuya situación la coloca en el eje de lo inteligible y lo sensible. Si bien los teoremas de la aritmética y la lógica se aplican a lo real, no parecía imposible observar estas ciencias como puramente racionales, por débil que sea la advocación que hacen a la intuición sensible. Aunque las leyes de la física se expresan en lenguaje matemático, al parecer sigue siendo plausible derivar toda sustancia de la experiencia, considerándose el simbolismo matemático sólo una vestimenta cómoda. Viene de allí la distinción clásica entre dos grupos de ciencias, racionales y experimentales. Unas, que de acuerdo con la expresión de Goblot, no necesitan para ser verdaderas que sus objetos sean reales; y otras, podría decirse, cuyos objetos, para existir, no necesitan ser inteligibles. Pero, entonces, ¿en qué lugar puede situarse la geometría? La intervención manifiesta de la intuición espacial prohibía reducir su contenido a un sistema de proposiciones analíticas; por otro lado, sus verdades se imponían tan

[36] Op. cit., p. 182. Digamos de paso que el formalismo es rechazado en igual forma por los partidarios del materialismo dialéctico que ven en él una manifestación del "idealismo burgués". No obstante, hasta ahora no parece que esta oposición de orden filosófico haya determinado una orientación original del trabajo matemático como ocurrió con el intuicionismo.

bien al espíritu que resultaba imposible referirlas sólo a meras contingencias de la experiencia. La idea kantiana de la "síntesis *a priori*", que es el núcleo de toda la filosofía crítica fue, como hoy se sabe, inspirada por esta dificultad. Ahora bien, la axiomática invita a que se resuelva en forma muy distinta. Si la geometría clásica daba a la vez la idea de ser pura e intuitiva era porque constituía una forma mixta al reunir en una ciencia que al parecer era única, dos disciplinas distintas que, como se ve ahora, están disociadas claramente: una geometría pura, representada por la teoría axiomática, en la que el sentido intuitivo de los términos y proposiciones deliberadamente se descarta y cuya verdad se mide sólo mediante la coherencia lógica, sin recurrir a la experiencia; y una geometría aplicada, intuitiva, en la cual la forma demostrativa sólo constituye un accesorio y cuyos teoremas son, en realidad, leyes físicas. La segunda sirvió para constituir la primera, pero ésta ha llegado a ser independiente, se yergue gracias a su propia fuerza, y si, en ocasiones, se refiere a la otra lo hace únicamente como a uno de sus "modelos" posibles. Cierto es que las dos pueden ser expuestas en un mismo discurso, de donde proviene la confusión, pero este lenguaje único puede prestarse a dos lecturas distintas. A la pregunta: ¿cómo puede la razón, sin el auxilio de la experiencia, hacernos conocer las propiedades de lo real?, se dará en lo sucesivo una respuesta semejante a la que da Einstein al principio de su opúsculo *La geometría y la experiencia:* "La perfecta claridad sobre este punto me parece fue puesta al alcance de cada uno gracias a la corriente que los matemáticos denominan *axiomática.* El progreso realizado por ésta consiste en haber hecho la separación clara y definitiva de lo intuitivo y lo lógico. De acuerdo con la axiomática sólo los hechos lógicos y formales constituyen el objeto de la ciencia matemática, pero no el elemento intuitivo que puede referirse a ellos."

Hay que aclarar que resulta necesario cuidarse al interpretar correctamente este desdoblamiento de la geometría en el momento en que, en lugar de considerarla sola, vuelve a colocársela en el sistema de las ciencias. ¿Debe entenderse entonces que el carácter ambiguo de la geometría clásica es resultado de su situación intermedia y que las dos partes en que el aparato axiomático la escinde deben simplemente unirse, uno al grupo de las ciencias racionales o deductivas, y el otro al de las ciencias experimentales o inductivas para, de este modo, reforzar la antigua dicotomía que colocaba, por un lado, a las ciencias lógico-matemáticas y por el otro a las ciencias físicas, naturales y morales, quedando ahora bien precisado el lugar donde debe hacerse el corte? Tal interpretación va de acuerdo con la concepción dualista de la ciencia que actualmente profesa el empirismo lógico, el cual establece, entre dos tipos de ciencias, una separación más radical aún, que hasta ahora no se había hecho. Sitúa por un lado las ciencias formales —lógica y matemática—, a las que considera bajo la forma depurada que les da la presentación axiomática: esto es, vacías de toda significación exterior y que, en sentido estricto, no nos enseñan nada acerca de lo real. Sus enunciados, que son puramente analíticos, conciernen exclusivamente a las transformaciones del discurso. Por el otro lado, sitúa a todas las ciencias de lo real para cuya expresión utilizamos, ciertamente, el lenguaje lógico-matemático pero que, en principio, podrían prescindir de él sin perder nada de su contenido, que proporcionaría por entero la experiencia.

No obstante, si se invocan las enseñanzas de la axiomática para apoyar esta tesis, se olvidaría un hecho esencial. Muy lejos de encerrarse dentro del dominio geométrico inicial, la axiomática se ha extendido rápidamente por los dos lados: en dirección a la aritmética y la lógica y hacia la mecánica y la física. En la actualidad le interesa el conjunto de las ciencias, por lo que no es sólo en el interior de la geometría donde se produce el corte entre lo racional y lo experimental, lo lógico y lo intuitivo. El desdoblamiento axiomático funciona en todas las ciencias o, en todo caso, en todas las que están lo suficientemente avanzadas como para prestarse a la organización deductiva. Colóquese a la mecánica o a la óptica bajo la forma de una axiomática simbolizada y se deja de estar en presencia de una ciencia de lo real para encontrarse frente a un sistema formal, vacío de todo contenido empírico, donde "no se sabe ya de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero". Y a la inversa, si frente a una axiomática abstracta se sabe asignar a los axiomas una interpretación válida en un cierto dominio de lo real, súbitamente se ilumina todo. Los símbolos adquieren un sentido concreto, las fórmulas una verdad empírica. Ni siquiera resulta necesario, para ello, que la aplicación recaiga en lo que habitualmente se denomina el mundo físico, pues del mismo modo una traducción aritmética o lógica desempeña a la perfección este trabajo. Así, por ejemplo, la idea que se tiene habitualmente del número, que es abstracta cuando se la compara con un montón de bolas de billar, se convierte en una interpretación concreta en relación con la x que aparece en los axiomas, y del mismo modo respecto a las nociones lógicas de negación, implicación, pertenencia a una clase, etcétera.

Bajo estas condiciones, el desdoblamiento axiomático no funciona en forma transversal, al nivel de la geometría, sino que divide longitudinalmente toda la escala de las ciencias, de la lógica a las ciencias morales. La única diferencia, y es sólo de grado, es que las primeras adoptan con mayor facilidad la forma axiomática, de modo que así se reconoce mejor la posibilidad de una lectura abstracta. Pero que ellas mismas se presten, como lo ha revelado la axiomática, a una lectura doble, nos demuestra muy bien que no se distinguen en lo esencial de las ciencias empíricas y que, a su manera, son ya ciencias de lo real. No existen ciencias abstractas y ciencias concretas, ciencias racionales y ciencias empíricas. En primer lugar, hay entre las ciencias grados diversos de abstracción y racionalidad que permiten puedan ser ordenadas en serie. En segundo lugar, existe para cada una de ellas la posibilidad de una lectura doble: abstracta, racional y formal, o concreta, empírica y material. Gracias a una convención de lenguaje es posible utilizar la palabra *lógica* o la palabra *matemática* para nombrar la lectura abstracta de cualquier teoría axiomatizada. Pero, en este caso, el sentido de estas palabras sufre igualmente un desdoblamiento axiomático, por lo que será necesario cuidarse del equívoco que amenaza. Cualquiera que sea el dominio que se trate —aritmética, óptica, etc.— y sobre el que se haya edificado una axiomática, ésta será exclusivamente una construcción *lógica* en el sentido de que resultará vacía y puramente formal; pero, en otro sentido, también puede representar una teoría *lógica* del mismo modo que una teoría aritmética u óptica, de acuerdo con la interpretación que se dé a sus símbolos, y si el conjunto de sus axiomas puede traducirse en proposiciones de la lógica. Del mismo modo, el término matemática tomará, en adelante, un sentido ambiguo, como aparece en el texto de Einstein arriba citado. Bien puede, en razón de que la matemática es la que puso el ejemplo, designar una teoría que ha sido reducida a su forma abstracta. Deviene entonces un sinónimo de *lógica* entendida en su primera acepción. Resulta necesario entenderlo así, por ejemplo, en las bromas de Russell y Poincaré (véase el inciso 10). Pero este sentido relativamente nuevo se añade, sin borrarlo, al sentido más tradicional, de acuerdo con el cual de este modo se denomina a un grupo particular de ciencias, aquellas cuyo objeto son los números, las figuras, etc. Lejos de oponerse mediante caracteres antitéticos a todas las demás ciencias consideradas en conjunto, las matemáticas, entendidas en esta forma, son por un lado vecinas de la lógica y, por el otro, de las ciencias físicas, aunque las fronteras se mantienen un tanto indecisas pues los conjuntos del matemático tienen gran parecido con las clases del lógico; la cinemática une la geometría con la dinámica y se da cierto titubeo para decidir si la probabilidad debe atribuirse al matemático, al lógico o al físico. A pesar de la ambigüedad subsistente en el lenguaje, la disociación se realiza en el pensamiento, entre los dos elementos que permanecían enredados en la noción clásica de la matemática, que a su vez se caracteriza por su objeto y su método: ciencia de la cantidad y ciencia demostrativa.

La antigua distinción entre ciencia racional y ciencia empírica, que constituye un lugar común de la epistemología desde los tiempos de Bacon, sin duda merece ser conservada, pero con la condición de que no se confundan ya en ella dos acepciones que sólo coinciden parcialmente y que la axiomática permite separar en forma precisa una de la otra. Bien puede entendérsela como una clara dicotomía, y entonces no divide ya las ciencias en dos clases, sino que más bien señala una dualidad interior a cada ciencia; o bien se desea distribuir de esta forma las diversas ciencias, pero en este caso la separación resulta indecisa y relativa, como dividir un conjunto de hombres sólo en altos y pequeños. La oposición entre las ciencias formales y las ciencias de lo real no es justificable salvo en el caso de que se sobrepongan estas dos distinciones. Se denomina ciencias formales a las que, habiendo alcanzado en primer lugar un alto grado de abstracción se prestan, por excelencia, al tratamiento axiomático; y ciencias de lo real a las que, siendo menos avanzadas, difícilmente pueden desligarse de las interpretaciones concretas. Cuando se hace esto, uno no caracteriza a dos *especies* de ciencia sino a dos *tipos* ideales que se realizan en forma desigual en las diversas ciencias o, por mejor decirlo, a dos *polos* del pensamiento científico.

29. La filosofía del conocimiento

La oposición entre la razón y la experiencia constituye sólo una de las múltiples formas que, sin concordar en todos los puntos, expresan en forma diversa aunque con parentesco evidente lo que Whewell llamaba "la antítesis fundamental de la filosofía"; las ideas y los hechos, el pensamiento y las cosas, el conocimiento y el ser, lo inteligible y lo sensible, lo abstracto y lo concreto, lo construido y lo que es dado, lo concebido y lo percibido, lo *a priori* y lo *a posteriori,* etcétera. Las investigaciones axiomáticas, cuando invitan a preguntarse acerca de las relaciones entre lo lógico y lo intuitivo, aportan en esta forma su contribución a un problema que a través de la geometría y del sistema entero de las ciencias, conjunta un tema mayor de la reflexión filosófica. El método axiomático no es sólo uno de los procedimientos técnicos de los matemáticos. Es posible encontrar en él una ilustración, que es particularmente sugestiva, de la forma como procede el pensamiento en el conocimiento. Y al aplicarle las nociones de las que él mismo hace uso se diría que nos ofrece, de las operaciones cognoscitivas, un modelo concreto sobre el que puede ensayarse una lectura abstracta.[37] Puede verse aquí, en primer lugar, que no debe darse ningún sentido absoluto a los dos términos de la antítesis, cuyo límite se desplaza incesantemente. Esto, ciertamente, no es nuevo y, en todo el frente de las ciencias no ha dejado de advertirse este movimiento del espíritu que lo lleva a tratar de inmediato a sus creaciones como si fueran un dato que debe superarse en una abstracción posterior. Lo concreto, afirmaba Langevin, es lo abstracto hecho familiar, mediante el uso. Y en la actualidad los matemáticos jóvenes objetan el "empirismo" de un Borel que lo perfeccionó. Ahora que están acostumbrados a manejarlo se ha convertido, para ellos, en una noción intuitiva y tan natural que llegan a llamarla "innata".[38] Pero la axiomática coloca la idea bajo una luz directa. Mediante ella el caso de la geometría clásica resulta particularmente instructivo. Para el axiomático se inclina hacia el lado de lo intuitivo, en tanto que, por relación a los conocimientos empíricos que la hacían posible, de seguro parecería a los griegos como les parece en nuestros días a los niños a los que es la enseña: una creación difícil de

[37] *Cf.* F. Gonseth, *Les mathématiques et la réalité, essai sur la méthode axiomatique.* En lo que viene a continuación nos inspiramos en forma libre, pero amplia, en esta excelente obra.

[38] P. Langevin, *Les notions de corpuscule et d'atome,* p. 45; J. Dieudonné, *L'axiomatique…,* artículo citado, p. 50; A. Denjoy, *L' inneité du transfini,* apud Le Lionnais, *op.cit.,* p. 188.

la razón. De ella, la historia nos da a conocer dos *mutaciones,* cuya analogía fue subrayada por F. Gonseth. En dos ocasiones el espíritu ha franqueado el "umbral de abstracción", superando el dato mediante un acto irremplazable de iniciativa intelectual. Es necesario aprender a leer la recta geométrica en un hilo tendido, como posteriormente a leer la recta axiomática en la recta geométrica. Es por eso que no resulta paradójico en forma alguna ver a Euclides, como se hace en algunas ocasiones, como un verdadero axiomático. Del mismo modo, todas las nociones de la física clásica, como la masa, el potencial, la entropía, se apoyan sobre un dato sensible que esquematizan, pero a su vez sirven de soporte intuitivo a una axiomática abstracta.

En consecuencia, sólo es posible pensar ambos términos de la antítesis en su relación. El par adquiere sentido únicamente mediante la tensión que caracteriza a dos polos opuestos. Lo concreto sólo se puede definir como una vección. De la geometría de Hilbert puede uno remontarse a la de Euclides, de ésta a la geometría de los orientales, de esta última a otras formas más primitivas. Se avanza así en dirección a lo concreto, pero jamás alcanzando lo concreto puro, libre de toda conceptualización, como el que el empirismo pretende desplegar frente al espíritu. No existe otro fenómeno primero que el de la sensación pasiva. Las enseñanzas de la crítica de las ciencias concuerdan aquí con las de la psicología. Abierto en esta forma por su parte inferior, el conocimiento se encuentra también abierto por la parte superior. Lo abstracto es sólo lo último en forma provisional, y jamás se le piensa solo, nunca se le presenta al espíritu como si fuera un cuadro.

Sólo aparece como si hubiera sido realizado en un modelo, aunque sea solamente el modelo simbólico. No conocemos ninguna forma pura ni tampoco contenido informe. Puede haber allí un vacío de pensamiento; pero no podría haber pensamiento vacío. Para poder pensar realmente en la *nada* resulta necesario representarla recurriendo *a algo:* una cruz, la cifra que representa el cero, la idea de la *nada.* Para poder pensar en una estructura abstracta resulta necesario darle, sobre el papel, una forma concreta. El pensamiento trasciende el sistema de signos, necesita sobrevolarlo para poder captarlo como tal. Pero sin él, al faltarle el contacto directo con las cosas, se pierde en lo indeterminado.

Esta tensión bipolar, condición necesaria de todo conocimiento, aparece con particular claridad en el pensamiento axiomático. Las nociones un tanto vagas de la teoría del conocimiento —concepto e intuición, forma y contenido— quedan entonces bien claras dentro de la correlación que se establece entre la estructura abstracta y la realización concreta; entre el esquema y el modelo. Se capta aquí, en vivo, el movimiento de ida y vuelta que conduce al espíritu del uno al otro, iluminándolos al situarlos en correspondencia. Los físicos, como recordábamos arriba, con frecuencia muestran tendencias divergentes respecto al valor respectivo de las teorías abstractas y las teorías que recurren a las imágenes. Es muy cierto que el genio se manifiesta bajo formas diversas: uno sobresale en leer lo abstracto dentro de lo concreto y otro en interpretar lo abstracto por lo concreto. Pero de este modo, igual que la diferencia de temperatura es necesaria para que una máquina térmica funcione, del mismo modo conviene al espíritu que, para comprender, disponga de un desnivel que le permita circular de un plano al otro, elevarse del hecho a la idea y ejecutar el mismo movimiento en descenso. Formular la norma e ilustrarla con un ejemplo. Mediante este movimiento doble, en el que se resume toda forma de conocimiento, la axiomática nos ofrece, precisamente, uno de los ejemplos sobre los que puede percibirse mejor la norma.

Puede verse en esta forma a qué actitudes filosóficas se opone la axiomática y a cuáles favorece. Desprecia y evita el dogmatismo de la síntesis, el sueño de un punto de partida absoluto que le aseguraría a la deducción la seguridad definitiva. Y ella extiende ahora a la totalidad de las ciencias la forma hipotético-deductiva. En vista de que el método experimental logró desacreditar la esperanza cartesiana de alcanzar una física demostrativa, el logicismo de nuestros días, esto es, la idea de lograr una ciencia racional que no presuponiera ya nada, se ve desmentido por la regresión axiomática, la cual, por lejos que nos lleve, siempre encuentra frente a sí algo que es "anterior" que aún no se encuentra asimilado. Pero del mismo modo en que los axiomas no se imponen mediante la evidencia intrínseca, tampoco son el resultado de decretos arbitrarios. El convencionalismo parece sólo defendible para aquel que, artificialmente, desprende la axiomática de sus bases y de sus prolongaciones intuitivas, sin las cuales se convierte sólo en un juego trivial, sin relación alguna con la ciencia.

La filosofía del conocimiento que la axiomática sugiere no es otra cosa que un racionalismo que uno no se atreve a denominar empírico, dado que de este modo se encuentran, por lo común, opuestas ambas palabras. Por lo menos se le puede calificar de inductivo o experimental. El rechazo de todo *a priori* apodíctico o decisorio se duplica mediante una repulsa parecida de las dos ramas de la alternativa, entre las cuales el empirismo, en su versión actual, pretende encerrar el conocimiento: fenomenismo y nominalismo. Ni el espíritu contempla un dato en cuya elaboración no hubiera participado en ninguna forma, ni tampoco se agota en el plano de los signos y el cálculo formal. Y nada puede manifestar mejor su actividad que el establecimiento o la percepción de una correspondencia analógica entre el esquema simbólico y el modelo concreto.